نظرية الأعداد

مذكرة تدريبية للمرحلة الثانية

(تحتوي على أكثر من : 250 مسألة)

إعداد الأستاذ /

طارق بن عامر آل سعدون الصيعري


بك


اللهم


أستعين

مقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على رسول الله ، وبعد :

هذه مذكرة تدريبية في فرع نظرية الأعداد تصلُح لأن تكون مقدمة للمبتدئ في هذا العلم ، ومن ليس لديه خلفية سابقة . بذلت فيها جهدي كي تكون المفاهيم واضحة ، ومبسطة .

احتوت هذه المذكرة على سبع محاضرات ، وفي كل محاضرة مجموعة من الأمثلة التوضيحية مع ثلاثون مسألة ألمبيادية من النوع المبتدئ نصفها محلول ، والنصف الآخر تركته للنقاش بحيث أصبح عدد المسائل أكثر من مائتين وخمسين مسألة .

وقد كانت المحاضرات على الترتيب التالي :

المحاضرة الأول : قابلية القسمة ، وخوارزمية القسمة .

المحاضرة الثانية : الأعداد الأولية ، والنظرية الأساسية في الحساب .

المحاضرة الثالثة : القاسم المشترك الأعظم .

المحاضرة الرابعة : المضاعف المشترك الأصغر .

المحاضرة الخامسة : التطابقات .

المحاضرة السادسة : النظم العددية .

المحاضرة السابعة : الاستقراء الرياضي .

هذا ومن الله السداد ، والتوفيق ، فاللهم لك الحمد أولاً ، وآخراً .

بعض الرموز المستخدمة ، والمتكررة في الكتاب :

(1) $\mathbb{N}$: تعني مجموعة الأعداد الطبيعية .

(2) $\mathbb{Z}$: تعني مجموعة الأعداد الصحيحة .

(3) $\mathbb{Q}$: تعني مجموعة الأعداد النسبية .

(4) $\mathbb{R}$: تعني مجموعة الأعداد الحقيقية .

(5) $\mathbb{C}$: تعني مجموعة الأعداد المركبة .

(6) $a \mid b$: تعني أن العدد : a يقسم العدد : b .

(7) $a \nmid b$: تعني أن العدد : a لا يقسم العدد : b .

(8) $\gcd = (a,b)$: تعني القاسم . أو العامل . المشترك الأعظم للعددين : a و b .

(9) $l\,\text{cd} = [a,b]$: تعني المضاعف المشترك الأصغر للعددين : a و b .

(10) $a \equiv b \pmod{n}$: تعني العدد : a يطابق العدد : b مقياس : n . وهي صورة جميلة لقابلية القسمة وتعني أن باقي قسمة : a على : n يساوي : b .

بعض المتطابقات المهمة التي نحتاجها في حل الكثير من المسائل :

1. $\left(a^2 - b^2\right) = \left(a + b\right)\left(a - b\right)$

2. $\left(a^3 - b^3\right) = \left(a - b\right)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

3. $\left(a^3 + b^3\right) = \left(a + b\right)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

4. $a^4 + 4b^4 = \left(a^2 + 2b^2 + 2ab\right)\left(a^2 + 2b^2 - 2ab\right)$

5. $a^4 + 1 = \left(a^2 + \sqrt{2}a + 1\right)\left(a^2 - \sqrt{2}a + 1\right)$

6. $\left(a + b + c\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

7. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \left(a + b + c\right)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc\right)$

8. $\left(a^n - b^n\right) = \left(a - b\right)\left(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + \dots + a^1b^{n-2} + a^0b^{n-1}\right)$

9. $\left(a^{2n+1} - b^{2n+1}\right) = \left(a - b\right)\left(a^{2n}b^0 + a^{2n-1}b^1 + \dots + a^1b^{2n-1} + a^0b^{2n}\right)$

10. $(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}.b^k = a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}.b^1 + \binom{m}{2}a^{m-2}.b^2 + \dots + \binom{m}{m-1}a^1.b^{m-1} + b^m$

المحاضرة الأول

قابلية القسمة ، وخوارزمية القسمة : *Divisibility and Division Algorithm*

(1) القسمة :

القسمة : هي إيجاد عدد نسبته إلى الواحد كنسبة المقسوم إلى المقسوم عليه ، أما القاسم المشترك الأعظم لعددين أو أكثر فهو أكبر عدد يقسم العددين معاً ، أو هو أكبر العوامل المشتركة بينهما ، مثلاً : نسبة $\frac{15}{3}$ كنسبة : $5:1$.

(2) قابلية القسمة :

نقول أن العدد a يقسم العدد b بدون باقٍ ، ويكتب بالشكل : $a \mid b$ ، أو $\frac{b}{a}$ إذا وجد عدد صحيح : c بحيث : $b = ca$ أو $\frac{b}{a} = c$ ، فمثلاً : العدد : 3 يقسم العدد : 6 ، وبالتالي يمكن أن نكتب : $6 = 3 \times 2$.

بينما إذا كان : a لا يقسم b ، فإننا نكتبه على الصورة : $a \nmid b$ ، فمثلاً العدد : 5 لا يقسم العدد : 8 ، لأنه لايوجد عدد إذا ضربناه في : 5 لكان الناتج : 8 .

ويمكن أن نقول أن : a عامل $(factor)$ من عوامل : b أو نقول أن : b مضاعف $(multiple)$ للعدد : a

(3) القاسم التام أو الكامل : *Fully Divides*

نقول أن العدد : a^n يقسم العدد : b ، ونكتب : $a^n \| b$ إذا كان : n أكبر أس لـ a يجعل : a^n تقسم العدد : b . أي : $a^n \mid b$ بشرط أن : $a^{n+1} \nmid b$.

مثال : أوجد أكبر عدد لـ : n حيث : $3^n \mid 135$ ؟

بتحليل العدد : 135 سنجد أنه يساوي : $135 = 3.3.3.5 = 3^3.5$ بسهولة سنجد أن : $n = 3$. أي أن : $3^3 \| 135$.

(4) خواص القاسم :

ليكن a,b,c أعداد صحيحة عندئذ:

(1) إذا كان : $a\,|\,b$ و $a\,|\,c$ ، فإن : ، $a\,|\,-b$ ، $a\,|\,-c$ ، وبصورة عامة : $a\,|\,(b\pm c)$. أي أن : a يقسم حاصل جمعهما ، أو طرحهما .

مثال : $3\,|\,6$ ، و $3\,|\,9$ إذاً : $3\,|\,-6\,,-9$ ، وتقسم : $3\,|\,(9+6)=15$ ، وتقسم : $3\,|\,(9-6)=3$ ، وأيضاً تقسم : $3\,|\,(6-9)=-3$.

(2) إذا كان : $a\,|\,b$ ، فإن : $a\,|\,bc$ ، و $ac\,|\,bc$ حيث $c\neq 0$. أي أن القاسم لعدد يقسم أي مضاعف هذا العدد .

مثال : $2\,|\,10$ ، إذاً : $2\,|\,10\times 3=30$. أي أن : 2 تقسم مضاعفات : 10 .

(3) إذا كان : $a\,|\,b$ و $a\,|\,c$ ، فإنه يوجد عددان صحيحان : x,y يحققان أن : $a\,|\,bx\pm cy$ أي أن : a تقسم أي تركيب خطي على الصورة : $bx\pm cy$ ، وهذه هي الصورة العامة للفقرتين : $(1),(2)$.

(4) إذا كان : $a\,|\,b$ ، و $b\,|\,c$ ، فإن : $a\,|\,c$. أي أن القاسم يحقق علاقة التعدي .

(5) إذا كان : $a\,|\,b$ ، و $b\,|\,a$ ، فإن $a=b$ ، أو $a=-b$. أي أن قابلية القسمة تحقق علاقة الانعكاس.

برهان الثلاث الخواص الأولى :

وسنثبت الفقرات الثلاث الأولى ، والبقية يمكن إثباتها بنفس الفكرة ، وسنتركها كتمرين للطالب يبرهن في وقت المحاضرة .

(1) بما أن : $a \mid b$ إذاً يوجد عدد صحيح : b' يحقق أن : $b = ab'$. بالمثل : $c = ac'$. بالجمع أو الطرح سنجد أن : $b \pm c = ab' \pm ac' = a\left(b' + c'\right) \Rightarrow b' \pm c' = \dfrac{b \pm c}{a}$ إذاً : a تقسم المقدار : $b \pm c$ لأن : $b' \pm c'$ أعداد صحيحة .

(2) إذا كان $a \mid b$ فإن $ac \mid bc$ حيث $c \neq 0$.

$a \mid b \Rightarrow b = ab' \Rightarrow bc = acb' \Rightarrow \dfrac{bc}{ac} = b' \Rightarrow ac \mid bc$ لأن : b' عدد صحيح .

(3) بما أن : $a \mid b$ يمكن أن نكتب : $b = ab'$ بالضرب في : x يصبح المقدار على الصورة : $bx = ab'x$، ويمكن أن نكتب : $\dfrac{bx}{a} = b'x$ أي أن : a تقسم : bx لأن : $a \mid b$. بالمثل : $a \mid cy$ حيث : x, y أي عددين صحيحين ، الآن : فقط علينا أن نثبت أن : $a \mid bx + cy$ ، بالجمع نجد أن :

$$bx + cy = ab'x + ac'x \Rightarrow bx + cy = a\left(b'x + c'x\right) \Rightarrow \frac{bx + cy}{a} = b'x + c'x$$ وهذا

يعني أن : $a \mid bx + cy$ لأن : $b'x + c'x$ عدداً صحيحاً .

(5) ملاحظات مهمة :

- إذا كان $a \mid b$ و $c \mid d$ ، فهل : $(a+c) \mid (b+d)$ ؟

الإجابة طبعاً خاطئة ، وممكن إثباتها بسهولة بإعطاء مثال معاكس : $3 \mid 6$, $5 \mid 15$ ، ولكن : $5+3 \nmid 15+6$.

- لأي عدد صحيح : a ، فإن : $1 \mid a$ ، و $0 \mid a$ بشرط أن : $a \neq 0$.

- إذا كان : $a \mid c$ ، و $b \mid c$ ، فإن هذا لايقتضي بالضرورة أن : $ab \mid c$.

- كذلك إذا كان : $a \mid c$ ، و $b \mid c$ ، فإن هذا لايقتضي بالضرورة أن : $a \pm b \mid c$.

ومثال على الفقرتين الأخيرتين : لو أخذنا : $a=4, b=6, c=12$ ستلاحظ أن :

$4 \mid 12$ ، $6 \mid 12$ ، ولكن : $4.6 \nmid 12$ ، وأيضاً : $4+6 \nmid 12$. وممكن إعطاء مثال آخر عن الطرح .

(6) خوارزمية القسمة : *Division Algorithm*

عند قسمة العدد : 17 على العدد : 3 ، فإننا نحصل على العدد : 5 ، والباقي : 2 نسمي التركيب الخطي : $17 = 3 \times 5 + 2$ خوارزمية القسمة ، ونطلق على : 17 المقسوم *dividend* كما نسمي : 3 المقسوم عليه *divisor* ، العدد : 5 خارج القسمة *quotient* ، والعدد : 2 باقي القسمة : *remainder* .

لاحظ أن باقي القسمة أصغر من المقسوم عليه . ممكن هنا أن نستنتج تركيب خطي سنطلق عليه خوارزمية القسمة كالتالي :

تعريف :

إذا كان : $a, b \in \mathbb{Z}$ ، $a > 0$. بحيث إذا قسمنا العدد : a على العدد : b ، فإنه يوجد عددان $q, r \in \mathbb{Z}$ بحيث : $b = aq + r$ ، بشرط أن : $0 \leq r < a$.

نسمي : b المقسوم *dividend* ، a المقسوم عليه *divisor* ، q خارج القسمة *quotient* ، و r باقي القسمة *remainder* .

وهذه هي الصورة الخطية لخوارزمية القسمة ، وممكن أن نستنتج التالي من خوارزمية القسمة :

- دائماً : الباقي : r أصغر من المقسوم عليه : a .
- إذا كان : $r=0$ ، فإن : b تقبل القسمة على : a ، ونكتب خوارزمية القسمة في هذه الحالة : $b=aq$.

(7) الأعداد الزوجية ، والفردية : *Even and Odd numbers*

- **العدد الزوجي :** هو العدد الصحيح الذي باقي قسمته على : 2 يساوي : 0 ، ويمكن كتابته على الصورة : $2n$ حيث : $n\in\mathbb{Z}$ ، ومن أمثلته : $\{\cdots,-4,-2,0,2,4,\cdots\}$.
- **العدد الفردي :** هو العدد الصحيح الذي باقي قسمته على : 2 يساوي : 1 ، ويمكن كتابته على الصورة : $2n+1$ حيث : $n\in\mathbb{Z}$ ، ومن أمثلته : $\{\cdots,-5,-3,-1,1,3,5,\cdots\}$.

خصائصها :

- عند جمع أو طرح عددين زوجيين ، فإن الناتج عدد زوجي .

$$2n_1\pm 2n_2=2\Big(\underbrace{n_1\pm n_2}_{m}\Big)=2m\ ,\ m\in\mathbb{Z}\ .$$

- عند جمع أو طرح عددين فرديين ، فإن الناتج عدد زوجي .

$$\left(2n_1\pm 1\right)\pm\left(2n_2\pm 1\right)=2n_1\pm 2n_2\pm 2=2\Big(\underbrace{n_1\pm n_2\pm 1}_{m}\Big)=2m\ ,\ m\in\mathbb{Z}\ .$$

- عند جمع أو طرح عدد زوجي مع عدد فردي ، فإن الناتج عدد فردي .

$$2n_1\pm 2n_2+1=2\Big(\underbrace{n_1\pm n_2}_{m}\Big)+1=2m+1\ ,\ m\in\mathbb{Z}\ .$$

- حاصل ضرب عددين زوجيين هو عدد زوجي :

$$2n_1\times 2n_2=2\Big(\underbrace{2n_1\times n_2}_{m}\Big)=2m\ ,\ m\in\mathbb{Z}$$

- حاصل ضرب عدد زوجي مع عدد فردي هو عدد زوجي :

$$(2n_1)\times(2n_2+1)=4n_1n_2+2n_1=2\big(\underbrace{n_1n_2+n_1}_{m}\big)=2m\ ,\ m\in\mathbb{Z}$$

- حاصل ضرب عددين فرديين هو عدد فردي :

$$\begin{aligned}(2n_1+1)\times(2n_2+1)&=4n_1n_2+2n_1+2n_2+1\\&=2\big(\underbrace{2n_1n_2+n_1+n_2}_{m}\big)+1\\&=2m+1\ ,\ m\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

- كل عدد زوجي محصور بين عددين فرديين متتاليين ، وكل عدد فردي محصور بين عددين زوجيين متتاليين .

(8) العدد المربع الكامل ، والمكعب الكامل : *The Square and Cube number*

نقول عند عددٍ : a أنه مربع كامل إذا كان يمكن كتابته على الصورة : $a=n^2\ ,\ a,n\in\mathbb{R}$. مثل العدد : $25=5^2$ ، والعدد : $49=7^2$. كذلك نقول عن عددٍ : b أنه مكعب كامل إذا كان يمكن كتابته على الصورة : $b=m^3\ ,\ b,m\in\mathbb{R}$. مثل العدد : $27=3^3$

أيضاً يقال عن عددٍ أنه خالٍ من التربيع : *square free* إذا لم يكن في قواسمه الموجبة عدد مربع كامل مثل العدد : 15 خالٍ من التربيع لأن قواسمه : $3,5$. بينما العدد : 20 غير خالٍ من التربيع لأن في قواسمه : $4=2^2$.

(9) قابلية القسمة على الأعداد : $2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13$

قابلية القسمة على : 2 :

يقبل أي عدد القسمة على : 2 إذا كان آحاده عدد زوجي . مثل الأعداد : 456456456 ، 246 ، 919191914 ، 57898 ، 1432 ، فجميعها تقبل القسمة على : 2 لأن آحادها عدد زوجي . بينما الأعداد : 987789 , 567563 , 44441 جميعها لاتقبل القسمة على : 2 لأن آحادها عدد غير زوجي .

قابلية القسمة على : 3 :

يقبل أي عدد القسمة على : 3 إذا كان مجموع خاناته يقبل القسمة على : 3 . مثل العدد : 1362 عند جمع خاناته سنحصل على : $12 = 2 + 6 + 3 + 1$ ، و 12 يقبل القسمة على : 3 . إذاً : 1362 يقبل القسمة على : 3 ، ومن الأمثلة الأخرى : 5673209871 , 2010 , 1431 بينما : 2011 لايقبل القسمة على : 3 لأن مجموع خاناته : $4 = 1 + 1 + 0 + 2$ ، 4 لايقبل القسمة على : 3 .

قابلية القسمة على : 4 :

يقبل أي عدد القسمة على : 4 إذا كان آحاده مع عشراته يقبل القسمة على : 4 . مثل الأعداد : 116 ، 244 ، 1432 ، 5858589436 فكلها تقبل القسمة على : 4 لأن الأعداد : $16, 44, 32, 36$ تقبل القسمة على : 4 ، وهي تمثل الآحاد ، والعشرات .

قابلية القسمة على : 5 :

يقبل أي عدد القسمة على : 5 إذا كان آحاده أحد العددين : 5 , 0 . مثل الأعداد : 2010 ، 456825 ، 1430 ، 58585 فكلها تقبل القسمة على : 5 .

قابلية القسمة على : 6 :

يقبل أي عدد القسمة على : 6 إذا كان يقبل القسمة على العددين : 3 , 2 معاً . لأجل هذا إذا كان العدد يحقق قابلية القسمة على : 2 ، ويحقق قابلية القسمة على : 3 ، فهو يقبل القسمة على : 6 .

قابلية القسمة على : 7 :

سندرس طريقتين لقابلية القسمة على : 7 كالتالي :

الطريقة الأولى : نضرب آحاد العدد المطلوب دراسته في : 2 ثم نطرح الناتج من باقي العدد المطلوب ، ونستمر في هذه الخطوة حتى نحصل على عدد يقبل القسمة على : 7 .

سندرس قابلية قسمة العدد : 504 على : 7 ، ونطبق نفس الطريقة . الآحاد : 4 نضربه في : 2 سنحصل على : 8 نطرحه من المتبقي من العدد بدون الآحاد : $50-8=42$ وهذا عدد يقبل القسمة على : 7 .
إذاً : 504 تقبل القسمة على : 7 .

مثال آخر : العدد : 5005

الآحاد : 5 نضربه في : 2 سنحصل على : 10 نطرحه من المتبقي من العدد بدون الآحاد : $500-10=490$. وهذا عدد يقبل القسمة على : 7 لأنه عبارة عن : 49×10 .

ولكن هذه الطريقة قد تكون غير مجدية ، وطويلة إذا كانت الأعداد كبيرة جداً ، فالنأخذ الطريقة الثانية .

الطريقة الثاني : وهي تنسب لعالم الرياضيات بليز باسكال وهي طريقة رائعة بالذات للأعداد الكبيرة ، وفكرتها كالتالي : ليكن لدينا العدد على الصورة : $a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3 a_2 a_1$ حيث : $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_3, a_2, a_1$ تمثل خانات العدد ، و a_1 خانة الآحاد . لبحث قابلية قسمته على : 7 نتبع التالي : $a_1+3a_2+2a_3-a_4-3a_5-2a_6+\cdots$ وهكذا نستمر بأخذ كل ثلاث خانات الأولى موجبة ، والثلاث الثانية سالبة مع الضرب ، وبعد إجراء الضرب ، والجمع ، والطرح ، فإذا كان النتاج يقبل القسمة على : 7 ، فالعدد يقبل القسمة على : 7 ، ولعل المثال التالي يوضح الطريقة :

مثال : ابحث قابلية قسمة العدد : 12324312 على : 7 .

نطبق : $(2+3\times 1+2\times 3)-(4+3\times 2+2\times 3)+(2+3\times 1)$ نجمع الناتج بعد الضرب :

$$(2+3\times 1+2\times 3)-(4+3\times 2+2\times 3)+(2+3\times 1)=11-16+5=0$$

والصفر عدد يقبل القسمة على : 7

مثال آخر : ابحث قابلية قسمة العدد : 54911654196 على : 7 .

نطبق : $(6+3\times 9+2\times 1)-(4+3\times 5+2\times 6)+(1+3\times 1+2\times 9)-(4+3\times 5)$
نجمع الناتج بعد الضرب ، فنحصل على : $35-31+22-19=7$ ، و هو عدد يقبل القسمة على : 7 . إذاً العدد : 54911654196 يقبل القسمة على : 7 .

قابلية القسمة على : 8 :

يقبل العدد القسمة على : 8 إذا كان العدد المكون من آحاده ، وعشراته ، ومئاته يقبل القسمة على : 8 ، أو يقبل العدد على : 2 ثلاث مرات . أو ممكن أن نقول : إذا كان العدد المكون من الخانات الثلاث الأولى يقبل القسمة على : 8 .

مثل العدد : 1432 يقبل القسمة على : 8 لأن العدد : 432 يقبل القسمة على : 8 أو بقسمة العدد : 432 على : 2 ثلاث مرات سنجد أن : $\frac{108}{2}=54$, $\frac{216}{2}=108$, $\frac{432}{2}=216$. إذاً العدد يقبل القسمة على : 8 .

قابلية القسمة على : 9 :

يقبل العدد القسمة على : 9 إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على : 9 . مثل فكرة العدد : 3 .

قابلية القسمة على : 10 :

يقبل العدد القسمة على : 10 إذا كان آحاده : 0 .

قابلية القسمة على : 11 :

يقبل العدد القسمة على : 11 إذا كان حاصل طرح مجموع المنازل الفردية من مجموع المنازل الزوجية عدد يقبل القسمة على : 11 .

مثال : العدد : 1433432 يقبل القسمة على : 11 لأن : $(1+3+4+2)-(4+3+3)=0$ ، والصفر يقبل القسمة على : 11 بينما العدد : 19372395 لايقبل القسمة على : 11 لأن طرح مجموع المنازل الفردية من مجموع المنازل الزوجية يساوي : 9 ، وهو عدد لايقبل القسمة على : 11 .

قابلية القسمة على : 13 :

لدراسة قابلية قسمة أي عدد على : 13 نتبع التالي نضرب آحاد العدد المطلوب دراسته في : 9 ثم نطرح الناتج من باقي العدد المطلوب ، ونستمر بنفس الطريقة حتى نحصل على عدد يقبل القسمة على : 9 .

فمثلاً العدد : 1768 يقبل القسمة على : 13 ، لأن : $176-9\times8=176-72=104=13\times8$

إذاً العدد يقبل القسمة على : 13 .

(10) مسائل محلولة على الدرس :

(1) **أثبت أن :** $a-b$ **تقسم :** a^2-b^2 **لكل :** $a \neq b$.

الحل :

بتحليل المقدار : a^2-b^2 باستخدام متطابقة فرق بين مربعين سينتهي الحل بسهولة .

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ إذاً : $a-b$ عامل من عوامل المقدار : a^2-b^2 . إذاً هو قاسم له .

(2) **إذا كان** $x \neq -y \neq 0 \in \mathbb{Z}$ **أثبت أن :** $x+y \mid x^3+y^3$.

الحل :

بتذكر متطابقة مجموع مكعبين نحصل على المراد :

الآن نعلم أن : $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ لاحظ أن : $x+y$ عامل من عوامل المقدار : x^3+y^3 هذا يعني أن : $x+y \mid x^3+y^3$.

(3) **أثبت أن :** $2010^{2k}-1$ **يقبل القسمة على** 2009 ، **و** 2011 **حيث** $k \geq 1$ **عدد صحيح .**

الحل :

باستخدام المتطابقة : $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+y^{n-1})$

نجد أن :

$$\begin{aligned}
2010^{2k}-1 &= \left(2010^2\right)^k-1 \\
&= \left(2010^2-1\right)\left(2010^{k-1}+2010^{k-2}+\cdots+1\right) \\
&= \left(2010-1\right)\left(2010+1\right)\left(2010^{k-1}+2010^{k-2}+\cdots+1\right) \\
&= 2009.2011\left(2010^{k-1}+2010^{k-2}+\cdots+1\right)
\end{aligned}$$

واضح أن : 2009 ، و 2011 عوامل للمقدار : $2010^{2k}-1$. إذاً معناه أن : 2009 ، و 2011 قواسم للمقدار : $2010^{2k}-1$.

لاحظ أن : الفكرة الرئيسية في حل هذه الأمثلة ، وأمثله غيرهما قادمة هي التحليل ، وهي فكرة رئيسة في إثبات قابلية القسمة .

(4) إذا كان : 1432 تقسم العدد : $a+b$. حيث : a ، b أعداد صحيحة ، فأي الأعداد التالية يقبل القسمة على : 179 مع التعليل :

$$a^2-b^2 \quad , \quad a^2b+ab^2 \quad , \quad a^2+b^2 \quad , \quad a^3+b^3 \quad , \quad a^3-b^3 \quad , \quad a^2+2ab+b^2$$

الحل :

الفكرة تعتمد على التحليل مع ملاحظة أن : 179 عامل من عوامل : 1432 .

(5) أثبت أن العدد : 2^m عبارة عن حاصل جمع عددين فرديين متتالين .

الحل :

نعلم أن كل عدد زوجي محصور بين عددين فرديين متتاليين ، و 2^m إذاً : $2^m=2\times 2^{m-1}=2^{m-1}+2^{m-1}=\left(2^{m-1}-1\right)+\left(2^{m-1}+1\right)$ ، و $2^{m-1}+1 \ , \ 2^{m-1}-1$ عددان فرديان .

(6) أثبت أن العدد : 3^m عبارة عن حاصل جمع ثلاثة أعداد صحيحة متتالية .

الحل :

نفرض أن الأعداد المتتالية هي : $k+1 \ , \ k \ , \ k-1$ بجمعها سنحصل على : $k-1+k+k+1=3k$

. إذاً : بقسمة : 3^m على : 3 سنحصل على : 3^{m-1} . إذاً الأعداد هي : $3^{m-1}+1 \ , 3^{m-1} \ , 3^{m-1}-1$.

بجمعها :

$$\left(3^{m-1}-1\right)+\left(3^{m-1}\right)+\left(3^{m-1}+1\right)=3\times 3^{m-1}=3^m$$

وهو المطلوب .

(7) أثبت أن العدد : $\dfrac{n^2+2n+1}{n^2}$ مربع كامل .

الحل :

نعلم أن : $(k+1)^2=k^2+2k+1$. إذاً :

$$\frac{n^2+2n+1}{n^2}=\frac{(n+1)^2}{n^2}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

وهو مقدار مربع كامل .

(8) **أثبت أن** : $8 \mid 3^{2n}+7$ **لكل** : $n \in \mathbb{Z}^{+}$.

الحل :

نفكر دوماً بطريقة ما للتحليل يكون فيها : 8 عامل من عوامل العدد المطلوب . لاحظ :

$$\begin{aligned}3^{2n}+7 &= \left(3^{2n}-1\right)+8\\ &= \left(\left(3^{2}\right)^{n}-1\right)+8\\ &= \left(9^{n}-1\right)+8\\ &= \left(9-1\right)\left(9^{n-1}+9^{n-2}+\cdots+1\right)+8\\ &= 8\left(9^{n-1}+9^{n-2}+\cdots+2\right)\end{aligned}$$

واضح أن : 8 من عوامل المقدار . هذا يعني أن : $8 \mid 3^{2n}+7$.

(9) **أثبت أن** : $5 \nmid 2010^{k}+1$ **لكل** : $k \in \mathbb{Z}^{+}$.

الحل :

لاحظ أن : 5 من عوامل : 2010 إذاً : $5 \mid 2010^{k}$ ، وهذا يعني أن : $5 \nmid 2010^{k}+1$ لأنه سيوجد باقي هو الواحد .

(10) **إذا كانت** : $7 \mid 3x+2$ **أثبت أن** : $7 \mid 15x^{2}-11x-14$.

الحل :

التحليل ، والتحليل ، والتحليل : $15x^{2}-11x-14=\left(3x+2\right)\left(5x-7\right)$.

ولكن : $7 \mid 3x+2$ هذا يعني أن : : $7 \mid 15x^{2}-11x-14$.

(11) **إذا كان** : $a \mid b$ ، **و** $a \mid b \pm c$ ، **فإن** $a \mid c$.

الحل :

سؤال صغير جداً ، ولكن جميل جداً ! ، وقد نحتاج لفكرته لاحقاً ، فتذكر ؟

بما أن : $a \mid b \Rightarrow b = ab'$ ، كذلك بما أن : $a \mid b \pm c \Rightarrow b \pm c = aa'$ الآن بالتعويض بقيمة : b سنجد أن : $ab' \pm c = aa'$ ، ومنه سنجد أن : $c = aa' \pm ab' \Rightarrow c = a\left(a' \pm b'\right)$ ، ولكن : $a' \pm b'$ عدد صحيح . إذاً : $a \mid c$.

ملاحظة : **هذه العلاقة مهمة جداً ، ومفهومها إذا قَسَمَ عددٌ أحدَ عددين ، وحاصل جمعهما ، أو طرحهما ، فهو يقسم العدد الآخر .**

(12) **أوجد مجموع كل الأعداد الصحيحة الموجبة : n بحيث أن : n تقسم : n^2+n+2 .**

الحل :

نلاحظ أن : n تقسم : n^2+n هذا معنى ذلك أن : n تقسم المقدار إذا كانت : n تقسم : 2 ومنه سنجد أن الأعداد التي تقسم : 2 فقط هي : $1,2$ ومجموعهما يساوي : 3 .

(13) **أوجد كل الأعداد الصحيحة الموجبة : n بحيث : $n+1 \mid n^2+1$.**

الحل :

كيف أبدأ ؟ لاحظ أن المقسوم عليه : $n+1$. إذاً ما نريد أن يكون : $n+1$ عامل من عوامل المقسوم . لماذا لانفكر بمتطابقة فرق بين مربعين ؟! إذاً ، فالنحاول :

$$n^2+1=n^2-1+2=(n-1)(n+1)+2$$

أظن الحل اتضح وانتهى . الآن لاحظ أن : $n+1 \mid (n+1)(n-1)$ فقط يكفي أن نوجد القيم التي تحقق أن : $n+1 \mid 2$ ، وقواسم : 2 هي : $\pm1,\pm2$ ، وبمساواتها بـ $n+1$ سنجد أن القيم التي تحقق هي فقط : $n=1$ لأن المطلوب أن تكون : n صحيحة موجبة .

طريقة أخرى : $\dfrac{(n+1)^2-2n}{n+1}=\dfrac{n^2+1}{n+1}$ إذاً المطلوب : $n+1 \mid 2n$ ، وهذا يعني أن :

$n+1 \mid 2 \Leftarrow \dfrac{2(n+1)-2}{n+1}=\dfrac{2n}{n+1}$ ، وإكمال الحل كما هو في الأعلى .

(14) **ماهو عدد الأعداد المحصورة بين : 1 ، و $1,000,000$ ، وتكون مربعة كاملة وليست مكعب كامل .**

الحل :

يكون العدد مربع كامل ومكعب كامل إذا كان مرفوع للقوة : 6 .

إذاً : $1,000,000=1000^2=10^3$ واضح الآن أن عدد الأعداد المربعة الكاملة تساوي : 1000 عدد ، وعدد الأعداد المربعة الكاملة تساوي : 10 ومنه سنجد المطلوب : $1000-10=990$.

(11) مسائل إضافية على الدرس :

(1) أثبت أن : 5^k يمكن كتابتها كحاصل جمع خمسة أعداد متتالية .

(2) أوجد قيمة : k بحيث أن :

$$(k-1005)+(k-1004)+\cdots+(k-1)+k+(k+1)+\cdots+(k+1004)+(k+1005)=2011^n$$

(3) أثبت أن أي عدد مربع كامل يكتب على الصورة : $4m$, $4m+1$ ، $m \in \mathbb{Z}^+$.

(4) أثبت أن : 5 تقسم العدد : $1+2^{1431}+3^{1431}+4^{1431}$.

(5) أثبت أن : $14 \mid 3^{4n+2}+5^{2n+1}$ لكل : $n \in \mathbb{Z}^+$.

(6) أوجد كل القيم الصحيحة : n التي تحقق : $n+1431 \mid n+2010$.

(7) أوجد أكبر عدد صحيح موجب : n يحقق أن : $n+10 \mid n^3+100$.

(8) أثبت أن : $11^{10}-1$ يقبل القسمة على : 100 .

(9) إذا كان $2^n \,||\, 3^{2^{10}}-1$ أوجد n.

(10) أثبت أن حاصل ضرب أربعة أعداد صحيحة موجبة متتالية لا يمكن أن يكون مربع كامل .

(11) أثبت أن : $1+2^{1431}+3^{1431}+\cdots+2010^{1431}$ يقبل القسمة على : 2011 .

(12) أثبت أن : $2222^{5555}+5555^{2222}$ يقبل القسمة على : 7 .

(13) إذا كان : $a=x^{9999}+x^{8888}+x^{7777}+\cdots+x^{1111}+1$ ، و

$b=x^9+x^8+x^7+\cdots+x+1$ أثبت أن : $\frac{a}{b}$ عدد صحيح .

(14) أثبت لكل عدد صحيح موجب : n ، فإن : $n^2 \mid (n+1)^n-1$.

(15) أوجد جميع الأعداد الصحيحة : k التي تجعل : k^2+k+1 مربعاً كاملاً .

(16) أثبت أن : 5^k+3 يقبل القسمة على : 4 . لكل : $k \in \mathbb{Z}^+$.

(17) إذا كان : $19 \mid 3x+7y$. أثبت أن : $13 \mid 43x+75y$.

المحاضرة الثانية

الأعداد الأولية ، والنظرية الأساسية في الحساب :

The Prime Number and The Fundamental Theorem of Arithmetic

(1) الأعداد الأولية : *prime number*

لو بحثنا عن القواسم الموجبة للعدد : 23 ، فلن نجد سوى الواحد ، والعدد نفسه ، ومثل هذه الأعداد التي لها هذه الخاصية تسمى الأعداد الأولية ، فما هي الأعداد الأولية ؟ ، وماهي خصائصها ؟ .

تعريف :

نسمي العدد الصحيح : $p > 1$ عدداً أولياً *prime number* إذا كان له قاسمان موجبان فقط هما : 1 , p .

بينما نسمي العدد الصحيح : n عدداً مؤلفاً *cpmposite number* إذا لم يكن أولياً ، وكان له أكثر من قاسمين موجبين مثل العدد : 24 .

من أمثلة الأعداد الأولية : $2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,39,41$.

لاحظ أن :

- العدد : 2 هو العدد الأولي الزوجي الوحيد بينما كل الأعداد الأولية الأخرى فردية .
- العددان : $2,3$ هما العددان الأوليان الوحيدان المتتاليان .

(2) النظرية الأساسية في الحساب : *Fundamental Theorem of Arithmetic*

يمكن كتابة كل عدد صحيح : $n > 1$ بصورة ، وحيدة كحاصل ضرب قوى أعداد أولية على الصورة :

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

حيث : $p_1, p_2, \ldots, p_k$ أعداد أولية ، و $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{Z}^+$.

ومفهوم النظرية الأساسية في الحساب أن أبسط صورة للعدد الصحيح هي تحليله لحاصل ضرب أعداد قوى أعداد أولية ، لكون العدد الأولي لايمكن تحليله لأبسط من صورته لعدم وجود قواسم له سوى الواحد ، ونفسه.

(3) خصائص الأعداد الأولية :

ليكن : p عدداً أولياً ، و $a , b \in \mathbb{Z}$. عندئذ :

(1) إذا كان : $p \mid ab$ ، فإن : $p \mid a$ أو $p \mid b$.

(2) كل عدد صحيح : $n > 1$ له قاسم أولي .

(3) كل عدد صحيح مؤلف : $n > 1$ له قاسم أولي : p بحيث : $p \leq \sqrt{n}$.

(4) يوجد عدد لانهائي من الأعداد الأولية .

إثبات هذه الخصائص :

(1) إذا كان : $p \nmid a$ هذا يعني أن أكبر قاسم لـ p , a هو الواحد لأن : p أولياً ، ولكن : $p \mid ab$ إذاً : $p \mid b$ وهو المطلوب .

(2) نفرض أن : p أصغر قاسم موجب للعدد : n . إذا كان : $p > 1$ فإن : p عدد أولي .

نفرض أن : p له قاسم : q حيث : $1 < q < p$ إذاً : $q \mid p$ ، ولكن : $p \mid n$. إذاً : $q \mid n$. إذاً p ليس أصغر قاسم لـ n أكبر من الواحد ، وهذا تعارض مع الفرض . إذاً يجب أن يكون : p عدد أولي .

إثبات آخر : إذا كان : n أولياً ، فإن : $n \mid n$ ، وبالتالي انتهى المطلوب ، وإذا لم يكن أولياً ، فمن النظرية الأساسية في الحساب ، فإننا يمكن أن نكتب العدد : n كحاصل ضرب قوى أعداد أولية ، وبالتالي : $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ ، وهذا يعني أن : $p_1 \mid n$ ، و p_1 عدد أولي وبالتالي انتهى المطلوب .

(3) بما أن : n عدد غير أولي من الخاصية الثانية يوجد قاسم أولي لـ n ، وليكن : p . فالنفرض أن : $n = ab$ حيث : $1 < a \le b$ ، وبالتالي : $n \ge a^2$ ، وبما أن : p قاسم ، هذا يعني أن : $p \le a$ إذاً : $\sqrt{n} \ge \sqrt{a^2} = a \ge p$ ، بالتالي انتهى المطلوب .

(4) نفرض أن الأعداد الأولية منتهية ، وعددها : $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ على الصورة : $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n$. نفرض أن العدد : $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$ عدد غير أولي . واضح أن : $N > p_n$. إذاً يوجد قاسم أولي لـ N ، وليكن : p_i ، $1 \le i \le n$ حيث : p_i أصغر قاسم . إذاً : $p_i \mid N$ ، وأيضاً : $p_i \mid N - 1 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_n$ ، وهذا يعني أن : $p_i \mid N - (N-1) = 1$ ، ولكن هذا يعارض كون : p_i عدد أولي . إذاً الفرض الابتدائي خاطئ ، وبالتالي الأعداد الأولية غير منتهية .

استنتاج مهم :

من الخاصية الأخيرة يمكننا اختبار أولية العدد : n خصوصاً إذا كان صغيراً ، وذلك بإيجاد أقرب عدد صحيح لجذر : $\sqrt{n}$ ، ثم دراسة الأعداد الأولية التي أصغر من جذر العدد ، فإذا كانت تقسم العدد ، فالعدد غير أولي ، وإن لم تقسم ، فالعدد أولي ، وهذا مثال يوضح الخطوات :

مثال :

حدد ما إذا كانت الأعداد التالية أولية : 2011 , 1432 , 387 , 331 , 301 .

العدد : 301 :

نبحث عن الأعداد الأولية التي أصغر : $\sqrt{301}$. نلاحظ أن : $\sqrt{301} < \sqrt{324} = 18$. إذاً الأعداد الأولية التي أصغر : 18 ، وهي : $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$ ، وسنجد أن : 7 تقسم : 301 . إذاً العدد غير أولي .

العدد : 331 :

نبحث عن الأعداد الأولية التي أصغر : $\sqrt{331}$. نلاحظ أن : $\sqrt{301} < \sqrt{400} = 20$. إذاً الأعداد الأولية التي أصغر : 20 ، وهي : $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$. بدراسة قابلية قسم العدد : 331 . سنجد أن جميعها لاتقسم العدد : 331 . إذاً العدد : 331 عدد أولي لأنه ليس له قاسم أولي يحقق : $p \le \sqrt{331}$.

نترك بقية الأعداد للطالب ، وبنفس الفكرة .

(4) مسائل محلولة على الدرس :

(1) أوجد كل الأعداد الصحيح : n التي تحقق أن : $5n-3$, $4n-5$, $3n-4$ جميعها أعداد أولية .

الحل :

بجمع الأعداد الثلاثة سنلاحظ أن : $3n-4+4n-5+5n-3=12n-12=2(6n-6)$ حاصل الجمع عدد زوجي ، ونعلم أن حاصل جمع عددين فرديين عدد زوجي ، وحاصل جمع عدد فردي وزوجي عدد فردي ، وهذا يعني أن أحد الأعداد الثلاثة زوجي . إذاً أحدها يساوي : 2 بمساواة الأعداد الثلاثة بـ 2 سنجد أن : $5n-3=2\Rightarrow \boxed{n=1}$, $3n-4=2\Rightarrow \boxed{n=2}$ بينما عند : $4n-5$ لن يتحقق أن : n عدد صحيح .

بالتحقق عن قيم : $n=1,2$ في الأعداد الثلاثة لن يتحقق كونها أولية إلا عند : $n=2$.

(2) أوجد الأعداد الأولية : p , q التي تحقق أن للمعادلة التربيعية : $x^2-px+q=0$ جذرين صحيحين مختلفين .

الحل :

نفرض أن : a,b حيث : $a<b$ جذرا المعادلة . إذاً : $x^2-px+q=(x-a)(x-b)$. بالفك ، والمساواة :

$x^2-px+q=x^2-(a+b)x+ab$ أي أن : $p=a+b$ ، ولكن أحدهما يساوي الواحد أي أن : $a=1$. إذاً : $q=b$, $p=1+b$ ، وهذان عددان أوليان متتاليان ، ولايوجد عددان أوليان متتاليان سوى : $2,3$. إذاً : $p=3$, $q=2$.

(3) أوجد : 20 عدد مؤلفاً متتالياً .

الحل :

بالاستفادة من مضروب العشرين : $20!$ بسهولة سنجد أن :

$$20!+2\ ,\ 20!+2\ ,\ 20!+2\ ,\ldots,20!+21$$

مع ملاحظة أن هذه الأعداد يمكن تحليلها ، وبالتالي ليست أولية ، وإنما أعداد مؤلفة .

(4) **أثبت أن** : n^3+1 **عدد مؤلف . لكل** : $n>1$.

الحل :

بتحليل متطابقة مجموع مكعبين سنجد أن : $n^3+1=(n+1)(n^2-n+1)$ ، وهذا يعني أن المقدار يمكن تحليله لحاصل ضرب عاملين ، أي له أكثر من قاسمين .

(5) **أثبت أن** : 8^n+1 **عدد مؤلف . لكل** : $n\geq 1$.

الحل :

يمكن إعادة كتابة العدد على الصورة : $(2^3)^n+1=(2^n)^3+1$ ، الآن بتحليل متطابقة مجموع مكعبين سنجد أن : $(2^3)^n+1=(2^n)^3+1=(2^n+1)(2^{2n}-2^n+1)$ ، وبالتالي هذا عدد مؤلف يمكن تحليله .

(6) **أوجد جميع الأعداد الأولية** : p **بحيث يكون** : $17p+1$ **عدد أولي** .

الحل :

نفرض أن : $17p+1=k^2\Rightarrow 17p=k^2-1\Rightarrow 17p=(k-1)(k+1)$ ، وبما أن : $17\ ,\ p$ أوليان . إذاً لدينا الحالتان :

إما : $k-1=17\Rightarrow k=18\Rightarrow \boxed{p=19}$ أو أن : $k+1=17\Rightarrow k=16\Rightarrow \boxed{p=15}$ ، وهذا لايحقق لأن : p عدد أولي . إذاً توجد قيمة واحدة لـ p تحقق المطلوب ، وهي : $\boxed{p=19}$.

(7) **أثبت أن : 100 تقسم : $11^{10}-1$.**

الحل :

نتذكر مفكوك ذات الحدين كالتالي :

$$\begin{aligned}
11^{10}-1 &= (10+1)^{10}-1 \\
&= \left(10^{10}+10\times10^{9}+\cdots+10\times10+1\right)-1 \\
&= 10^{10}+10\times10^{9}+\cdots+10\times10 \\
&= 100\times k
\end{aligned}$$

لاحظ أننا استطعنا أخذ : 100 كعامل مشترك بين كل الحدود .

(8) **أوجد كل الأعداد الأولية : p التي تحقق : $p+20$, $p+10$ أعداد أولية في آنٍ واحد .**

الحل :

نلاحظ عند : $p=2$ لا تحقق . بينما : $p=3$ تحقق أن كلاهما أعداد أولية ، وهما : 23 , 13 .

إذاً سنبحث عن قيمة : $p>3$ ، وبالتالي يمكن كتابة : p على الصورة : $p=3k+1\ ,\ 3k+2$ بالتعويض عن : $p=3k+1$ في العدد : $p+20$ سنلاحظ أن : $p+20=3k+1+20=3(k+7)$ ، وهذا عدد غير أولي ، وبالتعويض عن : $p=3k+2$ في العدد : $p+10$ يصبح على الصورة : $p+10=3k+2+10=3(k+4)$ ، وهذا عدد غير أولي .

إذاً توجد قيمة واحدة فقط تحقق أن العددين أوليان في آنٍ واحد وهي : $p=3$.

(9) **أوجد أكبر قاسم أولي للعدد : 1001001001 .**

الحل :

نعيد كتابة العدد على صورته العشرية :

$$\begin{aligned}
1001001001 &= 1001\times10^{6}+1001 \\
&= 1001\times\left(10^{6}+1\right) \\
&= 7\times11\times13\times\left(\left(10^{2}\right)^{3}+1\right) \\
&= 7\times11\times13\times\left(10^{2}+1\right)\left(10^{4}-10^{2}+1\right) \\
&= 7\times11\times13\times101\times9901
\end{aligned}$$

إذاً أكبر قاسم أولي هو : 9901 .

(10) **العدد : 27000001 له بالضبط أربعة عوامل أولية أوجد مجموعها .**

الحل :

يمكن إعادة كتابة العدد على الصورة : $27000001 = 27000000 + 1 = (300)^3 + 1$.

للتبسيط نفرض أن : $x = 300$ يصبح العدد على الصورة : $x^3 + 1$ بالتحليل باستخدام متطابقة مجموع مكعبين نجد أن :

$$\begin{aligned} x^3 + 1 &= (x+1)(x^2 - x + 1) \\ &= (x+1)(x^2 + 2x + 1 - 3x) \\ &= (x+1)\left((x+1)^2 - 3x\right) \end{aligned}$$

بإرجاع قيمة : x سنجد أن :

$$\begin{aligned} (x+1)\left((x+1)^2 - 3x\right) &= (300+1)\left((300+1)^2 - 3 \times 300\right) \\ &= 301 \times \left((301)^2 - 900\right) \\ &= 7 \times 43 \times \left((301)^2 - (30)^2\right) \\ &= 7 \times 43 \times \left((301)^2 - (30)^2\right) \\ &= 7 \times 43 \times (301 + 30)(301 - 30) \\ &= 7 \times 43 \times 331 \times 271 \end{aligned}$$

وهذه أربعة أعداد أولية ، ومجموعها يساوي : $7 + 43 + 331 + 271 = 652$.

(11) **أثبت أن العدد : $2011^4 + 4^{1433}$ غير أولي .**

الحل :

سوف نستفيد من المتطابقة : $a^4 + 4b^4 = \left(a^2 + 2b^2 + 2ab\right)\left(a^2 + 2b^2 - 2ab\right)$.

ممكن أن نعيد كتابة العدد على الصورة :

$$2011^4 + 4^{1433} = 2011^4 + 4 \times (4^{1432}) = (2011)^4 + 4 \times (4^{358})^4$$

إذاً أصبح العدد على صورة المتطابقة في الأعلى حيث : $a = 2011 , b = 4^{358}$. إذاً يمكن تحليله ، وهذا يعني أنه غير أولي فله قواسم أخرى غير نفسه ، والواحد .

(12) أوجد جميع الأعداد الأولية : p التي تحقق أن : p^2+2^p عدد أولي .

الحل :

بالتجربة سنجد أن أول عدد أولي يحقق عند : $p=3$ ، ويساوي : $3^2+2^3=17$.

سنبحث الحالة التي يكون فيها : $p>3$ ، ولكن كل الأعداد الأولية الأخرى فردية ، فيمكن كتابتها على الصورة : $p=3k\pm1$.

نعيد كتابة العدد المطلوب على الصورة : $\left(p^2-1\right)+\left(2^p+1\right)=\left(p-1\right)\left(p+1\right)+\left(2^p+1\right)$.

العدد : $\left(p-1\right)\left(p+1\right)$ يقبل القسمة على : 3 ، وذلك بالتعويض عن : $p=3k\pm1$.إذاً المطلوب ضمن العدد : 2^p+1 ، ولكن هذا العدد يقبل القسمة على : 3 لأنه يمكن تحليله لكل : $p>3$ عدد فردي ، وذلك من تحليل المتطابقة : $\left(a^{2n+1}-b^{2n+1}\right)=\left(a-b\right)\left(a^{2n}b^0+a^{2n-1}b^1+\cdots+a^1b^{2n-1}+a^0b^{2n}\right)$. إذاً القيمة الوحيدة التي تحقق المطلوب هي : $p=3$.

(13) أثبت أن مربع أي عدد أولي : $p>3$ عند قسمته على : 12 ، فإن الباقي : 1 .

الحل :

أي عدد أولي : $p>3$ لن يخرج عن إحدى الصورتين : $p=6k\pm1$ لأن الصور الأخرى : $6k+2$ ، $6k+3$ ، $6k+4$ أعداد مؤلفة . بتربيع هاتين الصورتين نجد أن :

$$p^2=\left(6k\pm1\right)^2=36k^2+12k+1=12\left(3k^2+k\right)+1$$

وهذا عدد باقي قسمته على : 12 يساوي الواحد .

(14) أثبت أن : n^4+4 لايكون عدداً أولياً إلا إذا كان : $n=1$.

الحل :

بالتحليل نجد أن : $n^4+4=\left(n^2+2\right)^2-4n^2=\left(n^2+2n+2\right)\left(n^2-2n+2\right)$

إذاً المقدار لن يكون عدداً أولياً إلا إذا كان : $n=1$ ، وعند قيم أخرى لـ n سيكون العدد قابل للتحليل .

(5) مسائل إضافية على الدرس :

(1) أثبت أن أي عدد أولي : $p > 3$ عند قسمة مربعة على : 12 ، فإن الباقي دوماً يساوي الواحد .

(2) أوجد كل الأعداد الصحيحة : $a\ ,\ b$ التي تحقق : $a^4 + 4b^4$ عدد أولي .

(3) إذا كان : a,b,c أعداد صحيحة موجبة تحقق : $a^2 + b^2 = c^2$ أثبت أن : a ، أو b عدد زوجي .

(4) أثبت أن : $n^4 + 4^n$ عدد مؤلف لكل : $n \geq 2$.

(5) أوجد جميع الأعداد الأولية : p التي تحقق المعادلة : $p^2 = n^3 + 1$ لكل : $n \in \mathbb{Z}$.

(6) أوجد العوامل الأولية للعدد : 343000001 .

(7) أوجد كل الأعداد الأولية : p التي تجعل الأعداد التالية أولية أيضاً :

$$p+4\ ,\ p+6\ ,\ p+10\ ,\ p+12\ ,\ p+16\ ,\ p+22$$

(9) أثبت أن العدد : $545^4 + 4^{545}$ غير أولي .

(10) تحقق مع الإثبات هل العدد : 1211112111121 عدد أولي .

(11) إذا كان : p عدد أولي . أثبت أن أحد العددين : $8p-1\ ,\ 8p+1$ أولي ، والآخر عدد مؤلف .

(12) ماهو أصغر عدد أولي يقسم العدد : $5^{7^{10^{7^{10}}}} + 1$.

(13) أوجد عدد الأعداد الأولية المختلفة التي تقسم حاصل الضرب : $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 9 \times 10$.

(14) أوجد جميع الأعداد الأولية : p بحيث يوجد عدد أولي : q يحقق أن : $p^2 + pq + q^2$ مربع كامل .

(15) العدد : 1002004008016032 له عامل أولي : $p > 250000$ أوجد : p .

(16) افرض أن : n عدد صحيح موجب أثبت أن : $2^{4n+2} + 1$ عدد غير أولي .

(17) أوجد جميع العوامل الأولية للعدد : $3^{18} - 2^{18}$.

المحاضرة الثالثة

القاسم المشترك الأعظم

The greatest common divisor

(1) القاسم المشترك الأعظم : *greatest common divisor*

لو بحثنا في القواسم الموجبة المشتركة للعددين : 28 , 12 سنجد أن قواسم : 12 هي : $1,2,3,4,6,12$ بينما قواسم : 28 هي : $1,2,4,7,14,28$ سنجد أن القواسم المشتركة هي : $1,2,3$.

نقول أن العدد : 3 هو أكبر قاسم مشترك للعددين .

إذاً أكبر قاسم مشترك لعددين يسمى القاسم المشترك الأعظم ، ويطلق عليه اختصاراً : $\gcd$ ، وعادة تستخدم الأقواس : (a,b) للدلالة على المعنى ، والمراد القاسم المشترك الأعظم للعددين : a,b .

تعريف :

ليكن : $a,b\in\mathbb{Z}$ أحدهما لايساوي الصفر . نقول إن : $d\in\mathbb{Z}^{+}$ قاسم مشترك أعظم للعددين : a,b ، ونكتب : $d=(a,b)$ أو $d=\gcd(a,b)$ إذا ، وإذا فقط :

(1) $d\mid a$ ، $d\mid b$ . . تعني أن : d يقسم كلا العددين .

(2) إذا كان : $c\mid a$ ، $c\mid b$ ، فإن : $c\leq d$ . . تعني إذا وجد أي قاسم آخر للعددين ، فإنه أصغر من القاسم المشترك الأعظم .

أمثله :

$\gcd(8,9)=1$ ، $\gcd(6,24)=6$ ، $\gcd(56,0)=56$ ، ويمكن أن نعمم :

$a>0$, $\gcd(a,0)=\gcd(0,a)=a$.

(2) أهم خواص القاسم المشترك الأعظم :

كل خواص القاسم التي ذكرناها في المحاضرة الأولى هي خواص للقاسم المشترك الأعظم لأجل هذا سنذكر الأهم ، والمختصة للقاسم المشترك . ليكن a,b,c أعداد صحيحة عندئذ :

(1) إذا كان : $d_1=(a,b)$ ، و $d_2=(a,b)$ ، فإن : $d_1=d_2$.

(2) إذا كان : $b=qa+r$ ، فإن : $(a,b)=(a,r)$.

(3) $\gcd(a,b)=\gcd(-a,b)=\gcd(a,-b)=\gcd(-a,-b)$.

(4) إذا كان : $d=(a,b)$ ، فإنه يوجد : $x,y\in\mathbb{Z}$ يحققان أن : $a=dx,b=dy$ ، و $(x,y)=1$.

(5) إذا كان : $b=p_1^{\beta_1}\dots p_k^{\beta_k}\quad,\quad a=p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ ، فإن : $\gcd(a,b)=p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}\dots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}$ ، وسيأتي مزيد توضيح لاستنتاج القاسم المشترك الأعظم عن طريق التحليل إلى عوامل في الفقرة القادمة .

إثبات هذه الخواص :

(1) إذا كان : $d_1=(a,b)$ ، و d_2 قاسم مشترك أعظم ، فمن التعريف : $d_1\le d_2$ ، بالمثل إذا كان : $d_2=(a,b)$ ، d_1 قاسم مشترك أعظم ، فمن التعريف : $d_2\le d_1$ ، وهذا تناقض . إذاً : $d_1=d_2$.

(2) نفرض أن : $d_1=(a,b)$. من خصائص القاسم ، فإن : $d_1\mid(b-aq)$ لأن : $d_1\mid a\ ,\ d_1\mid b$. إذاً : $d_1\mid r$ حيث : $r=b-aq$. إذاً : $d_1\le(a,r)$.

الآن : نفرض أن : $d_2=(a,r)$. إذاً : $d_2\mid(qa+r)$ ، وهذا يعني أن : $d_2\mid b$ لأن : $b=qa+r$. إذاً : $d_2\le(a,b)$ أي أن : $d_1\le d_2$ ، و $d_2\le d_1$ ، وهذا تناقض . إذاً : $d_1=d_2$.

(3) سنثبت أن : $\gcd(a,b)=\gcd(-a,b)$ ، وبنفس الفكرة نستطيع أن نثبت البقية .

نفرض أن : $d_2=(-a,b)\ ,\ d_1=(a,b)$ ، وهذا يقتضي : $a=a'd_1\Rightarrow -a=(-a')d_1$ ، ومنه سنجد أن : $d_1\mid -a$. إذاً : $d_1\le d_2$ ، بنفس الفكرة سنجد أن : $d_2\le d_1$ ، وبالتالي : $d_1=d_2$.

وتكملة بقية الحالات بنفس الطريقة .

(4) نفرض : $\gcd(x,y)=d_1$. إذاً : $x=d_1x',y=d_1y'$ ، وبالتالي :

$a=dd_1x',b=dd_1y'$ ، وهذا يعني أن : $dd_1 \mid a\ ,\ dd_1 \mid b$. إذاً يوجد عدد يقسم : a,b أكبر : d ، وهذا تعارض . إذاً : $(x,y)=1$

(3) أمثلة على إيجاد القاسم المشترك الأعظم لعددين بطريقة التحليل لعوامل :

لإيجاد القاسم المشترك الأعظم بطريقة التحليل إلى عوامل . نقوم بتحليل العدد إلى عوامل الأولية ، وبعد ذلك ، فإن القاسم المشترك الأعظم هو حاصل ضرب العوامل الأولية المشتركة للعددين ذات الأس الأصغر .

(1) أوجد : $\gcd(220,140)$. بتحليل كل عدد سنجد أن :

	220
2	220
2	110
5	55
11	11
	1

$\Rightarrow 220=2^2\times5\times11$,

	140
2	140
2	70
5	35
7	7
	1

$\Rightarrow 140=2^2\times5\times7$

لاحظ أن العوامل الأولية المشتركة ذات الأس الأصغر هي : $2^2\times5=20$.

إذاً : $\gcd(220,140)=20$.

(2) أوجد : $\gcd(1638,2835)$. بتحليل كل عدد سنجد أن :

	1638
2	1638
3	819
3	273
7	91
13	13
	1

$\Rightarrow 1638=2\times3^2\times7\times13$,

	2835
3	2835
3	945
3	315
3	105
5	35
7	7
	1

$\Rightarrow 2835=3^4\times5\times7$

لاحظ أن العوامل الأولية المشتركة ذات الأس الأصغر هي : $3^2\times7=63$.

إذاً : $\gcd(1638,2835)=63$.

(4) إيجاد القاسم المشترك الأعظم باستخدام خوارزمية القسمة :

لاحظ أن الطريقة السابقة في استنتاج القاسم المشترك الأعظم غير مجدية إذا كانت الأعداد كبيرة جداً لأجل هذا نلجأ إلى فكرة خوارزمية القسمة ، أو باستخدام الطرح المتكرر كالتالي :

إذا كان : $a, b \in \mathbb{Z}$ ، $a > 0$. بحيث إذا قسمنا العدد : a على العدد : b ، فإنه يوجد عددان $q, r \in \mathbb{Z}$ بحيث : $b = aq + r$ ، بشرط أن : $0 \le r < a$.

$$\begin{aligned}
b &= aq_1 + r_1 && , \quad 0 \le r_1 < a \\
a &= r_1 q_2 + r_2 && , \quad 0 \le r_2 < r_1 \\
r_1 &= r_2 q_3 + r_3 && , \quad 0 \le r_3 < r_2 \\
r_2 &= r_3 q_4 + r_4 && , \quad 0 \le r_4 < r_3 \\
&\vdots \\
r_{k-2} &= r_{k-1} q_2 + r_k && , \quad 0 \le r_k < r_{k-1} \\
r_{k-1} &= r_k q_2 + r_{k+1} && , \quad r_{k+1} = 0
\end{aligned}$$

من الخاصية الثانية نعلم أنه إذا كان : $b = qa + r$ ، فإن : $(a,b) = (a,r)$. إذاً :

$$(a,b) = (a,r_1) = (r_1,r_2) = (r_2,r_3) = \cdots = (r_{k-2},r_{k-1}) = (r_{k-1},r_k) = r_k$$ ، لأن : $r_{k+1} = 0$

لاحظ أن : $r_{k+1} = 0$ لأن الباقي أصغر قيمة سيأخذها ، وهو الصفر كما شرحناه في خوارزمية القسمة سابقاً لأجل هذا نستمر في إجراء الخوارزمية حتى نحصل على باقي يساوي الصفر ، ويكون القاسم هو الباقي السابق.

لتوضيح الفكرة بمثال عددي : احسب : $\gcd(220,140)$ باستخدام فكرة خوارزمية القسمة .

$$\begin{aligned}
220 &= 140 \times 1 + 80 \\
140 &= 80 \times 1 + 60 \\
80 &= 60 \times 1 + \boxed{20} \\
60 &= 20 \times 3 + 0
\end{aligned}$$

وممكن أن نستنتجها باستخدام الطرح المتكرر ، وفكرتها نستمر في الطرح حتى نصل لعددين القاسم المشترك الأكبر بينهما العدد الأصغر أو الواحد كالتالي :

$$220 - 140 = 80 \ , \ 140 - 80 = 60 \ , \ 80 - 60 = 20 \Rightarrow \gcd(60,20) = 20$$

إذاً : $\gcd(220,140) = \gcd(140,80) = \gcd(80,60) = \gcd(60,20) = 20$

(5) تطبيقات لإيجاد القاسم المشترك الأعظم باستخدام خوارزمية القسمة :

(1) أوجد : $\gcd(2011,1432)$.

الحل :

بإجراء الطرح المتكرر نجد أن :

$$\begin{aligned}\gcd(2011,1432) &= \gcd(1432,2011-1432)\\ &= \gcd(1432,579)\\ &= \gcd(579,1432-2\times 579)\\ &= \gcd(579,274)\\ &= \gcd(274,579-2\times 274)\\ &= \gcd(274,31)\\ &= \gcd(31,274-8\times 31)\\ &= \gcd(31,274-8\times 31)\\ &= \gcd(31,26)=1\end{aligned}$$

لاحظ أن القاسم المشترك الأعظم يساوي الواحد لأن : 31 عدد أولي ولو واصلنا الطرح بنفس الفكرة سيكون آخر قاسم مشترك هو : $\gcd(26,5)=\gcd(5,26-5\times 5)=\gcd(5,1)=1$.

تذكير : العدد : 2011 عدد أولي ، فكيف نثبته ؟ سنتركه للقارئ .

(2) أوجد : $\gcd(2562,348)$.

الحل :

سنقوم بحل هذا السؤال باستخدام خوارزمية القسمة مع ملاحظة أن الطرح المتكرر فكرة مستنتجة من خوارزمية القسمة ، ولكن لتنويع الأفكار :

$$\begin{aligned}2562 &= 348\times 7+126\\ 348 &= 126\times 2+96\\ 126 &= 96\times 1+30\\ 96 &= 30\times 3+\boxed{6}\\ 30 &= 6\times 5+0\end{aligned}$$

إذاً : $\gcd(2562,348)=6$ ، ويمكن التأكد باستخدام التحليل إلى عوامل ، أو فكرة الطرح المتكرر .

(6) القاسم المشترك الأعظم لأكثر من عددين :

استطعنا في النقاط السابقة من إيجاد القاسم المشترك الأعظم لعددين ، فماذا عن أكثر من عددين ؟ .

مثلاً : لو أردنا إيجاد : $\gcd(24,36,21)$. لو وجدنا القواسم الموجبة لكل عدد ، فإن :

قواسم : 24 هي : $1,2,3,4,6,8,12,24$.

قواسم : 36 هي : $1,2,3,4,6,12,18,36$.

قواسم : 21 هي : $1,3,7,21$.

لاحظ أن أكبر قاسم مشترك بين الأعداد الثلاثة هو : 3 .

أيضاً لاحظ أن : $\gcd(24,36)=12$ ، و $\gcd(12,21)=3$. إذاً ممكن أن نضع تعريف للقاسم المشترك الأعظم لأكثر من عددين كالتالي :

تعريف :

إذا كان : $a,b,c\in\mathbb{Z}$ ، فإن : $\gcd(a,b,c)=\gcd\left(\underbrace{\gcd(a,b)}_{d_1},c\right)=\gcd(d_1,c)=d$.

مثال : $\gcd(14,35,12)=\gcd(\gcd(14,35),12)=\gcd(7,12)=1$

لاحظ أننا أوجدنا القاسم المشترك الأعظم للعددين الأولين : $\gcd(14,35)=7$ ، ثم نطبق خوارزمية القسمة بين الناتج مع العدد الثالث .

ممكن تطبيق نفس الفكرة مع أكثر من ثلاثة أعداد ، وسنضع التعريف التالي :

تعريف :

إذا كان : $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{Z}$ ، فإن : $\gcd(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\gcd(\gcd(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}),a_n)$.

ويمكن توضيحه على الصورة :

$$\begin{aligned}\gcd(a_1,a_2,\ldots,a_n)&=\gcd\left(\underbrace{\gcd(a_1,a_2)}_{d_1},a_3,a_4,\ldots,a_n\right)\\&=\gcd\left(\underbrace{\gcd(d_1,a_3)}_{d_2},a_4,a_5,\ldots,a_n\right)\\&=\cdots=\gcd(d_{n-1},a_n)\end{aligned}$$

(7) متطابقة بيزوه : *Bézout Identity*

وهي متطابقة جميلة ،ومهمة في حل نوعية خاصة من المعادلات الديوفنتية الخطية ، وتنص على التالي :

إذا كان : $a,b \in \mathbb{Z}$ حيث : $d=(a,b)$ ، فإنه يوجد عددين : $x,y \in \mathbb{Z}$ يحققان المعادلة الخطية :

$ax+by=d$.

عكس النظرية غير صحيح . أي قد يوجد عددين : $u,v \in \mathbb{Z}$ يحققان أن : $au+bv=g$ ، ومع ذلك : $\gcd(a,b) \neq g$ ، ويتحقق معكوس النظرية إذا كان : $d=1$. أي : $ax+by=1$.

مثال : إذا كان : $48x+27y=3$. أوجد : x,y .

فكرة حل مثل هذه المعادلة تأتي من متطابقة بيزوه ، ثم من خوارزمية القسمة ، ولكن بالسير بصورة عكسية كالتالي :

نتأكد أن : $\gcd(48,27)=3$. من خوارزمية القسمة :

$$\begin{aligned}48&=27\times1+21\\27&=21\times1+6\\21&=6\times3+\boxed{3}\\6&=3\times2+0\end{aligned}$$

إذاً متطابقة بيزوه متحققة لأن القاسم المشترك الأعظم للعددين : $48,27$ يساوي : 3 . الآن بعكس خوارزمية القسمة سنصل لقيم : x,y ، ونبدأ من الخطوة التي يظهر فيها القاسم . كالتالي :

$$\begin{aligned}3&=21-6\times3\\&=21-(27-21)\times3\\&=21-3\times27+3\times21\\&=-3\times27+4\times21\\&=-3\times27+4\times(48-27)\\&=-3\times27+4\times48-4\times27\\&=4\times48-7\times27\end{aligned}$$

وبما أن : $48x+27y=3$ ، و $48\times4+27\times-7=3$ ، إذاً : $x=4\ ,\ y=-7$.

(8) الأعداد الأولية نسبياً : Coprime numbers أو relatively prime numbers

نقول عند عددين : a,b أنهما أوليان نسبياً إذا كان القاسم المشترك الأعظم لهما يساوي الواحد . أي : $\gcd(a,b)=1$. مثال على ذلك : العددان : $8,9$ أوليان نسبياً لأن : $\gcd(8,9)=1$. كذلك : $7,12$ أوليان نسبياً لأن : $\gcd(7,12)=1$.

(9) خصائص الأعداد الأولية نسبياً :

لكل عدد : $a,b,c\in\mathbb{Z}$ ، فإن :

(1) إذا كان : $\gcd(a,b)=1$ ، فإن : $\gcd(ab,a+b)=\gcd(ab,a-b)=1$.

(2) إذا كان : $\gcd(a,a+1)=1$.

(3) إذا كان : $\gcd(a,b)=d$ ، فإن : $\gcd\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$.

(4) إذا كان : $a,b\mid c$ ، وتحقق أن : $\gcd(a,b)=1$ ، فإن : $ab\mid c$.

(5) إذا كان : $\gcd(a,b)=1$ ، فإن : $lcm[a,b]=ab$ لكل : $a,b>0$.

كل هذه الخصائص قد تم برهان بعضها سابقاً ، والبعض الآخر سيأتي ضمن التطبيقات .

(10) متطابقة بيزوه ، و الأعداد الأولية نسبياً :

سابقاً درسنا نظرية بيزوه ، والتي تنص على أنه لكل : $a,b,x,y\in\mathbb{Z}$ ، فإن : $ax+by=\gcd(a,b)$ ، وقلنا أن عكس النظرية لايتحقق إلا إذا كان : $\gcd(a,b)=1$. أي : $ax+by=1$ ، ويمكن إثباته بسهولة نفرض أن : $\gcd(a,b)=d$. إذاً : $d\mid ax+by$ لأنها تقسم أي تركيب خطي كما ذكرنا سابقاً ، ولكن : $ax+by=1$. إذاً : $d\mid 1$ ، وبالتالي : $d=1$.

(11) مسائل محلولة على الدرس :

(1) **أثبت أن :** $\gcd(a,b)=\gcd(a,b+a)=\gcd(a,b-a)$.

الحل :

نفرض أن : $(a,b)=d$ ، وهذا يعني أن : $d\mid a\ ,\ d\mid b$ ، إذاً من خصائص القاسم سنجد أن : $d\mid a+b$ ، بقي أن نثبت أن : d هو القاسم المشترك الأعظم للعددين : $a,b+a$. نفرض أن : d_1 هو القاسم المشترك الأعظم للعددين : $a,b+a$. أي : $\gcd(a,b+a)=d_1$. إذاً : $d_1>d$ ، وهذا يعني أن : $d_1\mid a\ ,\ d_1\mid a+b$ ، ومن خصائص القاسم سنجد أن : $d_1\mid a+b-a$ ، وبالتالي : $d_1\mid b$ أي أن : $d_1<d$ لأن القاسم المشترك الأعظم للعددين : a,b هو : d ، وهذا تناقض كون : $d_1>d$ ، $d_1<d$. إذاً : $d_1=d$ ، وبالتالي : $(a,b)=(a,b+a)$. بنفس الفكرة يمكن أن نثبت أن : $(a,b)=(a,b-a)$.

(2) **إذا كان القاسم المشترك الأعظم للعددين :** a,b هو $\gcd(a,b)=1$ **أثبت أن القاسم المشترك الأعظم** : $\gcd(a+b,a^2-ab+b^2)$ **إما** : 1 أو 3 .

الحل :

نفرض أن : $d=\gcd(a+b,a^2-ab+b^2)$ ، من خصائص القاسم يقسم أي مضاعف للعددين ، ويقسم أي تركيب خطي للعددين . إذاً : $d\mid(a+b)^2-a^2+ab-b^2=3ab$ ، وبالتالي : $d\mid 3ab$. أيضاً : $d\mid 3b(a+b)-3ab$ ، وبالتالي : $d\mid 3b^2$. بالمثل نجد أن : $d\mid 3a^2$ ، وبما أن : $(a,b)=1$. إذاً : $d\mid 3$ ، وبالتالي القيم الممكنة لـ d هي : 1 أو 3 .

(3) **أثبت أن :** $\gcd(30n+2\ ,\ 12n+1)=1$.

الحل :

في مثل هذه المسائل دوماً نفكر في خوارزمية القسمة أو الطرح المتكرر كالتالي :

$$\begin{aligned}30n+2&=(12n+1)\times 2+6n\\12n+1&=6n\times 2+1\\6n&=6n\times 1+0\end{aligned}$$

$$\therefore \gcd=(30n+2\ ,\ 12n+1)=(6n\ ,\ 12n+1)=(6n\ ,\ 1)=1$$

(4) ليكن : n عدد صحيح ، أثبت أن الكسر: $\frac{21n+4}{14n+3}$ لا يمكن تبسيطه .

الحل :

الكسر لا يمكن تبسيطه إذا كان القاسم المشترك الأعظم للعددين يساوي الواحد أو كان العددان أوليين نسبياً ، وهنا نستفيد من خوارزمية القسمة :

$$\begin{aligned}21n+4 &= (14n+3)\times 1+(7n+1)\\ 14n+3 &= (7n+1)\times 2+1\\ 7n+1 &= (7n+1)\times 1+0\end{aligned}$$

$$\therefore \gcd=(21n+4\ ,\ 14n+3)=(14n+3\ ,\ 7n+1)=(7n+1\ ,\ 1)=1$$

(5) ليكن : n عدداً صحيحاً ، أثبت أن : $\gcd(n^3+n^2-10n-1,n^2-3n+1)\,|\,11$.

الحل :

بإجراء القسمة المطولة سنجد أن :

$$\begin{aligned}\gcd(n^3+n^2-10n-1,n^2-3n+1) &= \gcd(n^2-3n+1,n-5)\\ &= \gcd(n-5,11)=11\end{aligned}$$

وهذا يعني أن : $\gcd(n^3+n^2-10n-1,n^2-3n+1)=1,11$ ، وكلاهما يحقق المطلوب .

لاحظ هنا أننا أجرينا القسمة المطولة حتى نستخرج : q,r فنستطيع تطبيق خوارزمية القسمة . وبالتالي استنتاج القاسم عن طريق خوارزمية القسمة .

(6) إذا كان : $\gcd(a,b)=1$ أثبت أن : $\gcd(a+b,a-b)$ إما : 1 أو 2 .

الحل :

نفرض أن : $\gcd(a+b,a-b)=d$. الآن : بما أن القاسم لعددين يقسم حاصل جمعهما ، وحاصل طرحهما إذاً : بجمع العددين نحصل على : $2a$ ، وبطرح العددين نحصل على : $2b$. إذاً : $d\,|\,2a\ ,\ d\,|\,2b$. إذا كانت : $d\nmid 2$ ، فإن : $d\,|\,a\ ,\ d\,|\,b$ ، وبالتالي : $d\,|\,(a,b)=1$. وهذا يعارض كون : $d\nmid 2$. إذاً : $d\,|\,2$ ، وبالتالي القيم الممكنة لـ d إما : 1 أو 2 .

(7) **أوجد الحلول الصحيحة الموجبة التي تحقق المعادلة :** $x^2 - y^2 = 17$.

الحل :

بتحليل الطرف الأيسر كفرق بين مربعين سنجد أن : $(x-y)(x+y) = 17$. العدد : 17 عدد أولي هذا يعني أن : $(x-y)(x+y) = 1 \times 17$. إذاً : $x - y = 1$ ، و $x + y = 17$ بحل نظام المعادلتين سنجد أن : $x = 9 \ , \ y = 8$.

(8) **إذا كان للمعادلة :** $x^2 + ax + b$ **جذور صحيحة . أثبت أن هذه الجذور تقسم :** b .

الحل :

نفرض أن جذور المعادلة هي : x_1 , x_2 . إذاً فالمعادلة تساوي :

$$\begin{aligned} x^2 + ax + b &= (x - x_1)(x - x_2) \\ &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 \end{aligned}$$

إذاً : $b = x_1 \cdot x_2$ ، وبما أن : $x_1 , x_2 \in \mathbb{Z}$. إذاً : x_1 , x_2 من عوامل : b ، وبالتالي قاسمة لـ b .

(9) **إذا كان :** $\gcd(n, 6) = 1$. **أثبت أن :** $24 \mid n^2 - 1$.

الحل :

عند قسمة أي عدد على : 6 ، فإن البواقي : $0, 1, 2, 3, 4, 5$ ، وبما أن : $\gcd(n, 6) = 1$ ، فإن البواقي المحتملة هي : $1, 5$ لأن البواقي الأخرى تحتمل أخذ عامل مشترك ، وبالتالي يعارض كون القاسم بين : $n, 6$ هو الواحد . إذاً يمكن كتابة : n على الصورة : $n = 6k \pm 1$ لاحظ أن : $n = 6k - 1$ هي نفسها : $n = 6k + 5$ لو طرحنا منها : 6 ، فتذكر .

الآن : بالتعويض عن قيمة : $n = 6k \pm 1$ في المقدار : $n^2 - 1$. سنجد أن :

$$n^2 - 1 = (6k \pm 1)^2 - 1 = 36k^2 \pm 12k + 1 - 1 = 12k(3k \pm 1)$$

الآن : أحد العددين : $3k \pm 1$, k زوجي ، والآخر فردي ، وبالتالي ، فإن : $24 \mid n^2 - 1$. لأن العدد الزوجي سيكون من عوامله : 2 عند ضربه في : 12 سنحصل على : 24 .

(10) **إذا كان :** $13 \mid a+4b$. **أثبت أن :** $13 \mid 10a+b$.

الحل :

لعلنا نتذكر الخاصية التي أثبتناها من خواص القاسم والتي تنص على أنه : إذا قسم عدد أحد عددين ، وحاصل جمعهما فهو يقسم الآخر .

لاحظ أن : $10(a+4b)-(10a+b)=39b$. ولكن : $13 \mid 10(a+4b)$ لأن : $13 \mid a+4b$

كذلك : $13 \mid [10(a+4b)-(10a+b)]=39b$. إذاً : $13 \mid 10a+b$.

(11) **إذا كان :** $(a,b)=(a,c)=1$. **أثبت أن :** $(a,bc)=1$.

الحل :

لعلنا سوف نستفيد من متطابقة بيزوه كالتالي :

نفرض وجود أعداد : $x,y,z,k \in \mathbb{Z}$ تحقق أن : $ax+by=1 \ , \ az+ck=1$. بضرب المعادلتين سنجد أن : $(ax+by)(az+ck)=1$. الآن بضرب القوسين ، وإعادة الترتيب :

$$\begin{aligned} 1 &= (ax+by)(az+ck) \\ &= a^2xz+acxk+abyz+bcyk \\ &= a(xz+cxk+byz)+bc(yk) \end{aligned}$$

وبما أن المعادلة متحققة هذا يعني أن : $(a,bc)=1$ ، وذلك بعكس متطابقة بيزوه .

(12) **أوجد كل الحلول الصحيحة للمعادلة :** $x+y=xy$.

الحل :

بما أن القيم صحيح ، فدوماً نفكر في التحليل لعوامل :

$$x+y=xy \Rightarrow x+y-xy=0 \Rightarrow (x-1)(1-y)=-1$$

الآن : إما $x-1=-1 \Rightarrow x=0 \ , \ y=0$. أو $x-1=1 \Rightarrow x=2 \ , \ y=2$.

إذاً الأزواج المرتبة المحققة للمعادلة هي : $(0,0) \ , \ (2,2)$

(13) **إذا كان :** $\gcd(5,n)=1$. **أثبت أن :** $125 \mid n^{100}-1$.

الحل :

بما أن : $\gcd(5,n)=1$ هذا يعني أن : $5 \nmid n$ ، وبالتالي يمكن كتابة : n على الصورة : $n=5k\pm1$ أو على الصورة : $n=5k\pm2$. لأن البواقي المحتملة لاتخرج عن المجموعة : $1,2,3,4$.

الآن : نأخذ الحالة الأولى ، وهي إذا كانت : $n=5k\pm1$. بالتعويض عن قيمة : n مع تذكر مفكوك ذات الحدين سنجد أن :

$$\begin{aligned}(5k\pm1)^{100}-1&=\left[(5k)^{100}\pm100\times(5k)^{99}\pm\cdots\pm100\times(5k)^{1}+1\right]-1\\&=(5k)^{100}\pm100\times(5k)^{99}\pm\cdots\pm100\times(5k)^{1}\end{aligned}$$

الآن واضح أنه بسهولة يمكننا أخذ : 125 كعامل مشترك بين كل الحدود فيصبح المقدار على الصورة :

$$\begin{aligned}(5k\pm1)^{100}-1&=\left[(5k)^{100}\pm100\times(5k)^{99}\pm\cdots\pm100\times(5k)^{1}+1\right]-1\\&=(5k)^{100}\pm100\times(5k)^{99}\pm\cdots\pm100\times(5k)^{1}\\&=125m\end{aligned}$$

إذاً : $125 \mid n^{100}-1$ ، والجزء الثاني نتركه للنقاش في المحاضرة .

(14) **أثبت أن :** $\gcd(n,n+1)=1$. **حيث :** $n\in\mathbb{Z}$.

الحل :

يمكن إثباتها بأكثر من طريقة :

باستخدام الطرح المتكرر : $\gcd(n,n+1)=\gcd(n,n+1-n)=\gcd(n,1)=1$.

وممكن بطريقة جبرية ، وذلك بأن نثبت أن هذا الكسر : $\dfrac{n+1}{n}$ لايمكن تبسيطه إلا إذا كان : $n=\pm1$ كالتالي : $\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{n}{n}+\dfrac{1}{n}=1+\dfrac{1}{n}$. وبما أن : n عدد صحيح . إذاً لن يكون المقدار عدداً صحيحاً إلا إذا كان : $n=\pm1$ ، وبالتالي : $\gcd(n,n+1)=1$.

باستخدام خوارزمية القسمة : $n+1=n\times1+1 \quad , \quad n=1\times n+0 \quad \Rightarrow \gcd(n,n+1)=1$.

فائدة : ممكن من هذا السؤال الصغير أن نستنتج علاقة جميلة جداً ، وهي أن أي عددين متتاليين هما أوليان نسبياً فيما بينهما .

(12) مسائل إضافية على الدرس :

(1) أوجد : $\gcd(588,44)$ ، $\gcd(2261,1275)$ ، $\gcd(123456789,987654321)$.

(2) أوجد القاسم المشترك الأعظم للعددين : 90 , 252 ، ثم أوجد : x , y بحيث تحقق المعادلة الديوفنتية الخطية : $d = 252x + 90y$.

(3) باستخدام التحليل إلى عوامل أوجد القاسم المشترك الأعظم لكل من :

(a) 36 , 45 (b) 522 , 87 (c) 1024 , 118098

(4) افرض : $a,b,k \in \mathbb{Z}$. تحقق : $k \mid a$, $k \mid b$ أثبت أن : $k \mid \gcd(a,b)$.

(5) لكل: $k \in \mathbb{Z}^+$. أثبت أن : $\gcd(6k+5,7k+6)=1$.

(6) إذا كان : $\gcd(a,b)=1$ ، وكان : $c \mid (a+b)$. أثبت أن : $\gcd(a,b)=\gcd(a,c)=1$.

(7) أوجد كل القيم لـ : $n \in \mathbb{Z}^+$ ، و التي تحقق أن : 7 تقسم العددين : 2^n-1 , 2^n+1 .

(8) إذا كان : $c \mid a$, $c \mid b$. أثبت أن : $c \mid \gcd(a,b)$.

(9) أوجد القاسم المشترك الأعظم للعددين : $3^{15}+1$ ، و 271 .

(10) لكل : $k_1,k_2,\ldots,k_n \in \mathbb{Z}$, $a_1,a_2,\ldots,a_n$ حيث : $\gcd(a_1,a_2,\ldots,a_n)=d$. أثبت أن :

$$d \mid (a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_nk_n)$$

(11) إذا كان : $k = abc+1$. أثبت أن : $\gcd(k,a)=\gcd(k,b)=\gcd(k,c)=1$.

(12) إذا كان : $d \mid a$, $d \mid b$. أثبت أن : $d^2 \mid ab$.

(13) إذا كان : $c \mid ab$ ، و $\gcd(c,a)=d$. أثبت أن : $c \mid db$.

(14) أوجد كل الأعداد الأولية : p,q التي تحقق المعادلة : $p^2-2q=1$.

(15) إذا كان للمعادلة : x^2+ax+b جذور نسبية . أثبت أن هذه الجذور أعداد صحيحة .

(16) إذا كان : $p,q>3$. أعداد أولية . أثبت أن : $24 \mid p^2-q^2$.

(17) إذا كان : $m \in \mathbb{Z}^+$ ، و $a,b \in \mathbb{Z}$. أثبت أن : $\gcd(ma,mb)=m\gcd(a,b)$. حيث :

$$\gcd\left(\frac{a}{\gcd(a,b)},\frac{b}{\gcd(a,b)}\right)=1$$.

المحاضرة الرابعة

المضاعف المشترك الأصغر

The least common multiple

(1) المضاعف المشترك الأصغر : *least common multiple*

لو أمعنا النظر في مضاعفات العدد : 6 ، وهي : $6,12,18,24,30,36,42,48,56,\dots$. كذلك في مضاعفات العدد : 8 ، وهي : $8,16,24,32,40,48,56,64,\dots$ لوجدنا أن مضاعفات العددين تشتركان في العدد : 24 ، والعدد : 48 . نسمي أصغر العددين بين مضاعفات : 6 ، و 8 بالمضاعف المشترك الأصغر .

تعريف :

ليكن : $a,b \in \mathbb{Z}$ أعداد غير صفرية . نقول إن : $m \in \mathbb{Z}^+$ مضاعف مشترك أصغر للعددين : a,b ، ونكتب : $m = [a,b]$ ، أو $m = lcm[a,b]$ ، أو $m = lcm(a,b)$ إذا ، وإذا فقط :

(1) $m \mid a$ ، $m \mid b$ . . تعني أن كلا العددين يقسمان : m .

(2) إذا كان : $c \mid a$ ، $c \mid b$ ، فإن : $m \le c$ . . تعني إذا وجد أي مضاعف آخر للعددين ، فإنه أكبر من : المضاعف المشترك الأصغر .

(2) المضاعف المشترك الأصغر لأكثر من عددين :

لو أردنا إيجاد المضاعف المشترك الأصغر للأعداد : $4,5,10$ ، فإن مضاعفات كل عدد على الصورة :

$$\boxed{4,8,12,16,\boxed{20},24,\dots} \quad , \quad \boxed{5,10,15,\boxed{20},25,\dots} \quad , \quad \boxed{10,\boxed{20},30,\dots}$$

سنلاحظ أن الأعداد كلها تشترك في : 20 . إذاً هو المضاعف المشترك الأصغر لهما ، ومعنى هذا أن تعريف المضاعف المشترك لعددين يمتد لأكثر من عددين .

تعريف المضاعف المشترك الأصغر لمجموعة أعداد :

ليكن : $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ أعداد غير صفرية . نقول إن : $m \in \mathbb{Z}^+$ مضاعف مشترك أصغر للأعداد : $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ، ونكتب : $m = lcm[a_1, a_2, \ldots, a_n]$. إذا ، وإذا فقط :

(1) $a_1, a_2, \ldots, a_n \mid m$ . . تعني أن كل الأعداد تقسم : m .

(2) إذا كان : $a_1, a_2, \ldots, a_n \mid c$ ، فإن : $m \le c$ . . تعني إذا وجد أي مضاعف آخر للأعداد ، فإنه أكبر من : المضاعف المشترك الأصغر لها جميعاً .

مثال :

المضاعف المشترك الأصغر للأعداد : $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$ هو : 24 لأن كل الأعداد تقسم : 24 ، و لايوجد عدد آخر أصغر من : 24 يحقق أن الأعداد جميعها تقسمه .

(3) خصائص المضاعف المشترك الأصغر :

إذا كان : $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ، فإن الخواص التالية متحققة :

(1) إذا كان : $lcm[a,b] = m$ ، حيث : $m = aa' = bb'$ ، فإن : $\gcd(a', b') = 1$.

(2) إذا كان : $lcm[a,b] = m$ ، و m' مضاعف آخر للعددين ، بحيث : $m' = aa' = bb'$ ، وكان : $\gcd(a', b') = 1$ ، فإن : $m = m'$.

(3) إذا كان : $a \mid c \,,\, b \mid c$ ، فإن : $lcm[a,b] \mid c$.

(4) إذا كان : $a \mid b$ ، فإن : $lcm[a,b] = b$.

(5) إذا كان : $a \mid c \,,\, b \mid c$ ، فإن : $lcm[a,b] \mid c$.

(6) $lcm[a,b,c] = lcm[[a,b],[b,c]]$.

(7) لكل : $k \in \mathbb{Z}^+$ ، فإن : $[ka, kb] = k \cdot [a,b]$.

(8) إذا كان : $b = p_1^{\beta_1} \ldots p_k^{\beta_k} \quad , \quad a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ ، فإن : $lcm[a,b] = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \ldots p_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)}$ ، وسيأتي مزيد توضيح لاستنتاج المضاعف عن طريق التحليل إلى عوامل في الفقرة القادمة .

إثبات بعض الخواص :

(1) نفرض أن : $\gcd(a',b')=d$. حيث : $a'=a''d\ ,\ b'=b''d$ ، ولكن : $m=aa'=bb'$ ، بالتعويض عن قيمة : a',b' سنجد أن : $m=aa''d=bb''d$ ، وبالتالي : $\frac{m}{d}=aa''=bb''$ ، ولكن : $\frac{m}{d}<m$ أي أنه يوجد مضاعف آخر لـ a,b أصغر من : m ، وهذا يناقض أن : m هو المضاعف المشترك الأصغر . إذاً : $\gcd(a',b')=1$.

(2) وهي عكس الخاصية الثانية ، ويمكن إثباتها بنفس الفكرة .

(3) سيتم إثباتها لاحقاً إن شاء الله ضمن التطبيقات .

(4) من التعريف : $a\mid b\ ,\ b\mid b$. إذاً : b مضاعف للعددين : a,b . إذا وجد مضاعف آخر للعددين ، وليكن : m . فإن : $b\le m$ لأن : $b\mid m$.

سنترك إثبات بقية الخواص كتمرين للمناقشة أثناء المحاضرة ، وبعضها ستذكر في التطبيقات ، ويمكن إثباتها بالاستفادة من التعريف .

(4) العلاقة بين القاسم المشترك الأعظم ، والمضاعف المشترك الأصغر :

لكل : $a,b\in\mathbb{Z}$ ، فإن العلاقة التالية متحققة : $\gcd(a,b)\cdot lcm[a,b]=a.b$.

الإثبات :

للتسهيل نفرض أن : $lcm[a,b]=m\quad,\quad \gcd(a,b)=d$. أصبح المطلوب إثبات أن : $d\cdot m=a.b$.

الآن : من تحليل العددين : a,b لعواملهما الأولية نعلم أن : $a=p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}\quad,\quad b=p_1^{\beta_1}\dots p_k^{\beta_k}$

بضرب العددين : $a\cdot b=p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}\cdot p_1^{\beta_1}\dots p_k^{\beta_k}=p_1^{\alpha_1+\beta_1}\dots p_k^{\alpha_k+\beta_k}$

ولكن : $lcm[a,b]=p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)}\dots p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}$ ، $\gcd(a,b)=p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}\dots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}$. إذاً :

$$\begin{aligned}\gcd(a,b)\cdot lcm[a,b]&=p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}\dots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}\cdot p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)}\dots p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}\\&=p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)+\max(\alpha_1,\beta_1)}\dots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)+\max(\alpha_k,\beta_k)}\\&=p_1^{\alpha_1+\beta_1}\dots p_k^{\alpha_k+\beta_k}\\&=a\cdot b\end{aligned}$$

لاحظ أن العددين : α_k,β_k أحدهما الأصغر ، والآخر الأكبر .

(5) المضاعف المشترك الأصغر للعددين الأولين أو الأولين نسبياً :

إذا كان : $a,b \in \mathbb{Z}$ ، بحيث : $\gcd(a,b)=1$ ، فإن : $lcm[a,b]=a.b$.

وهذه يمكن إثباتها من العلاقة السابقة بصورة مباشرة .

(6) إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددين عن طريق التحليل إلى عوامل :

المضاعف المشترك الأصغر لعددين هو حاصل ضرب جميع العوامل الأولية غير المشتركة للعددين ، والمشتركة ذات الأس الأكبر .

(1) أوجد : $lcm[220,140]$. بتحليل كل عدد سنجد أن :

$$\begin{array}{r|l} 2 & 220 \\ 2 & 110 \\ 5 & 55 \\ 11 & 11 \\ & 1 \end{array} \Rightarrow 220 = 2^2 \times 5 \times 11 \quad , \quad \begin{array}{r|l} 2 & 140 \\ 2 & 70 \\ 5 & 35 \\ 7 & 7 \\ & 1 \end{array} \Rightarrow 140 = 2^2 \times 5 \times 7$$

لاحظ أن العوامل الأولية المشتركة ذات الأس الأكبر هي : $2^2 \times 5 = 20$.

إذاً : $lcm[220,140]=2^2 \times 5 \times 7 \times 11 = 1540$ ، ويمكن أن نوجده بمعلومية العلاقة بين القاسم المشترك الأكبر ، والمضاعف المشترك الأصغر لعددين كالتالي :

نعلم أن : $\gcd(220,140)=20$. أوجدناه في صفحة : (30) . بما أن : $\gcd(a,b)\cdot lcm[a,b]=a.b$

إذاً :

$$\begin{aligned} \gcd(220,140)\cdot lcm[220,140] &= 220 \times 140 \\ \Rightarrow lcm[220,140] &= \frac{220 \times 140}{\gcd(220,140)} \\ \Rightarrow lcm[220,140] &= \frac{220 \times 140}{20} \\ \Rightarrow lcm[220,140] &= 220 \times 7 \\ \Rightarrow lcm[220,140] &= 1540 \end{aligned}$$

لاحظ أصبحت لدينا طريقتين لاستنتاج المضاعف المشترك الأصغر لعددين . إما بالتحليل ، أو بالعلاقة بين القاسم ، والمضاعف للعددين .

(2) أوجد : $lcm(1638,2835)$. بتحليل كل عدد سنجد أن :

2	1638
3	819
3	273
7	91
13	13
	1

$\Rightarrow 1638 = 2\times 3^2 \times 7\times 13$,

3	2835
3	945
3	315
3	105
5	35
7	7
	1

$\Rightarrow 2835 = 3^4 \times 5\times 7$

لاحظ أن العوامل الأولية المشتركة ذات الأس الأكبر هي : $3^4 \times 7 = 63$.

إذاً : $lcm(1638,2835) = 2\times 3^4 \times 5\times 7\times 13 = 73710$.

طريقة أخرى :

أوجدنا سابقاً : $\gcd(1638,2835) = 63$. إذاً :

$$\gcd(1638,2835)\cdot lcm[1638,2835] = 1638\times 2835$$

$$\Rightarrow lcm[1638,2835] = \frac{1638\times 2835}{\gcd(1638,2835)}$$

$$\Rightarrow lcm[1638,2835] = \frac{1638\times 2835}{63}$$

$$\Rightarrow lcm[1638,2835] = 1638\times 45$$

$$\Rightarrow lcm[1638,2835] = 73710$$

(3) أوجد : $lcm(11,8,5)$.

نلاحظ أن الأعداد الثلاثة أولية نسبياً فيما بينها . إذاً : $lcm(11,8,5) = 11\times 8\times 5 = 440$.

(4) أوجد : $lcm(6,10,12)$. بالاستفادة من الخواص : (6) , (4) :

$$\begin{aligned} lcm[6,10,12] &= lcm[[6,10],[10,12]] \\ &= lcm\left[\frac{6\times 10}{2},\frac{10\times 12}{2}\right] \\ &= lcm[30,60] = 60 \end{aligned}$$

(7) مسائل محلولة على الدرس :

(1) إذا كان : $\gcd(a,b)+lcm(a,b)=a+b$. **أثبت أن العددين قاسم للآخر .**

الحل :

نفرض أن : $lcm(a,b)=m \quad , \quad \gcd(a,b)=d$. يصبح المعطى على الصورة : $d+m=a+b$.

من العلاقة بين القاسم ، والمضاعف نعيد كتابة العلاقة : $d+\dfrac{a\cdot b}{d}=a+b$. بالتوحيد ، وضرب الطرفين :

$$\begin{aligned} d^2+a\cdot b &= ad+bd \\ &\Rightarrow ad+bd-ab-d^2=0 \\ &\Rightarrow (a-d)(d-b)=0 \end{aligned}$$

الآن : إما : $d=a$ ، أو : $d=b$ ، وهذا يعني أن أحد العددين قاسم للآخر .

(2) إذا كان : $a\mid c \, , \, b\mid c$ ، **فإن :** $lcm[a,b]\mid c$.

الحل :

بما أن : $a\mid c \, , \, b\mid c$. **إذاً :** $c=ax=by$ ، لكل : $x,y\in\mathbb{Z}$ ، وإذا كان : $\gcd(a,b)=d$ ، من متطابقة بيزوه يوجد عددين : $u,v\in\mathbb{Z}$ يحققان أن : $d=au+bv$. الآن : من العلاقة بين القاسم ، والمضاعف : $lcm[a,b]=\dfrac{ab}{d}$. الآن : نريد أن نثبت أن : $\dfrac{c}{lcm[a,b]}$ عدد صحيح .

$$\frac{c}{lcm[a,b]}=\frac{c}{\frac{ab}{d}}=\frac{cd}{ab}=\frac{c(au+bv)}{ab}=\frac{c}{b}u+\frac{c}{a}v=yu+xv\in\mathbb{Z}$$

(3) أوجد أصغر عدد صحيح موجب يقبل القسمة على الأعداد : $1,2,\ldots,11$.

الحل :

العدد هو المضاعف المشترك الأصغر لهذه الأعداد . أي المطلوب : $lcm(1,2,\ldots,10,11)=m$. الآن : إذا كان العدد يقبل القسمة على : 8 ، فهو تلقائياً سيقبل القسمة على : $2,4$ ، وإذا قبل القسمة على : 9 ، فهو سيقبل القسمة على : $3,6$ ، وإذا قبل القسمة على : 5 ، فهو سيقبل القسمة على : 10 . إذاً من عوامل العدد : $5,8,9$ ، سيبقى العددين : $7,11$. إذاً أصغر عدد مطلوب : $5\times7\times8\times9\times11=27720$.

إذاً : $lcm(1,2,\ldots,10,11)=27720$.

(4) **أوجد عددين** : x, y . **بحيث** : $xy = 10584$, $lcm[x,y] = 252$.

الحل :

يوجد عددين : $a,b \in \mathbb{Z}^+$ يحققان : $ax = by = 252$. بحيث : $\gcd(a,b) = 1$. الآن :

$$a \cdot b = \frac{lcm[a,b]}{x} \cdot \frac{lcm[a,b]}{y} = \frac{252^2}{xy} = \frac{63504}{10584} = 6$$

بما أن : $a,b \in \mathbb{Z}^+$. إذاً لدينا الاحتمالات التالية : $a \cdot b = 2 \times 3$, $a \cdot b = 1 \times 6$. الآن :

إذا : $a = 1$, $b = 6$. إذاً : $b = \frac{252}{y} = 6 \Rightarrow y = 42$, $a = \frac{252}{x} = 1 \Rightarrow x = 252$.

وإذا كان : $a = 2$, $b = 3$ ، فإن : $b = \frac{252}{y} = 3 \Rightarrow y = 84$, $a = \frac{252}{x} = 2 \Rightarrow x = 126$.

إذاً القيم الممكنة لـ x, y كثنائيات مرتبة : $(252,42),(42,252),(126,84),(84,126)$.

(5) **إذا كان** : $\gcd(x,y) = 30$, $lcm[x,y] = 1680$. **حيث** : $x = 240$. **أوجد** : y .

الحل :

من العلاقة بين القاسم ، والمضاعف نعلم أن : $\gcd(xy) \cdot lcm[x,y] = x \cdot y$. إذاً :

$$y = \frac{\gcd(xy) \cdot lcm[x,y]}{x} = \frac{30 \times 1680}{240} = 210$$

(6) **تحقق مع التعليل** : $\gcd(a,b,c) \cdot lcm[a,b,c] = abc$.

الحل :

ليس من الضرورة أن : $\gcd(a,b,c) \cdot lcm[a,b,c] = abc$ ، ويمكن إثباته بإعطاء مثال معاكس :

بوضع : $a = 2$, $b = 4$, $c = 8$. سنجد أن : $\gcd(2,4,8) = 2$ ، و $lcm[2,4,8] = 8$ ، وبالتالي سنجد أن : $\gcd(2,4,8) \cdot lcm[2,4,8] = 8 \times 2 = 16$. بينما : $abc = 2 \times 4 \times 8 = 64$ ، وبالتالي الطرفان غير متساويين .

إذاً هذه العلاقة لا تتحقق إلا لعددين فقط .

(7) **أوجد كل الأعداد الصحيحة** : $a \geq b$ ، **والتي تحقق** : $lcm[a,b] = 100 \quad , \quad \gcd(a,b) = 10$.

الحل :

من العلاقة بين القاسم ، والمضاعف سنجد أن : $\gcd(a,b) \cdot lcm[a,b] = ab \Rightarrow ab = 1000 = 10^3$

الآن : لاحظ أن : $a,b \in [10,100]$. العددان : $10,100$ يحققان المطلوب . هل توجد أعداد أخرى ؟

لكي يكون : 10 قاسم لعدد يجب أن يكون آحاده صفراً ، والأعداد التي آحادها صفراً في الفترة : $[10,100]$
ستكون هي المضاعف المشترك الأكبر ، وهذا يخالف المعطى ، وبالتالي لايوجد عددان يحققان سوى : $10,100$.

(8) **أوجد المضاعف المشترك الأصغر لـ** : $6x^2 - 24 \quad , \quad 3x^3 + 6x^2$.

الحل :

بتحليل العدد الأول : $3x^3 + 6x^2 = 3x^2(x+2)$.

بتحليل العدد الثاني : $6x^2 - 24 = 6(x^2 - 4) = 2 \times 3 \times (x-2)(x+2)$.

بتطبيق التعريف :

$$lcm\left[6x^2 - 24 \ , \ 3x^3 + 6x^2\right] = 2 \times 3 \times x^2 (x-2)(x+2) = 6x^4 - 24x^2$$

(9) **قارن بين العددين** : $\dfrac{17^{30}}{31} \ , \ \dfrac{31^{16}}{17}$.

الحل :

بما أن : $\gcd(17,31) = 1$ لأنهما أوليان . إذاً : $lcm[17,31] = 17 \times 31 = 527$. بتوحيد المقامات ، وذلك بإيجاد المضاعف المشترك الأصغر للعددين سنجد أن :

$$\frac{17^{30}}{31} = \frac{17^{30} \times 17}{31 \times 17} = \frac{17^{31}}{527} \quad , \quad \frac{31^{16}}{17} = \frac{31^{16} \times 31}{17 \times 31} = \frac{31^{17}}{527}$$

الآن سنقارن بين : $\dfrac{17^{31}}{527} , \dfrac{31^{17}}{527}$ ، وبصورة أدق بين : $17^{31} , 31^{17}$:

$$17^{31} > 16^{31} = (2^4)^{31} = 2^{124} > 2^{85} = (2^5)^{17} = 32^{17} > 31^{17}$$

إذاً : $\dfrac{17^{30}}{31} > \dfrac{31^{16}}{17}$.

(10) **أوجد أصغر عدد بحيث إذا قُسم على : 2 يعطي الباقي : 0 ، وإذا قُسم على : 4 لكان الباقي : 2 ، وإذا قسم على : 5 لكان الباقي : 3 ، وإذا قسم على : 6 لكان الباقي : 4 .**

الحل :

مثل هذه المسائل نفكر دوماً في المضاعف المشترك الأصغر أولاً لهذه الأعداد : $lcm[2,3,4,5,6]=60$.

لاحظ أن الفرق بين المقسوم عليه ، وباقي القسمة دوماً يساوي : 2 . إذاً : العدد الذي يحقق المطلوب : 58 .

(11) **غادرت أربع سفن محملة ببضائع الميناء يوم : 2 يناير : 2011 . السفينة الأولى تعود إلى هذا الميناء كل أربع أسابيع ، و السفينة الثانية تعود إلى هذا الميناء كل ثمانية أسابيع ، و السفينة الثالثة تعود إلى هذا الميناء كل أثنى عشر أسبوعاً ، و السفينة الرابعة تعود إلى هذا الميناء كل ستة عشر أسبوعاً . في أي أسبوع ستلتقي جميع السفن منذ مغادرتها الميناء ؟ . هل تستطيع أن تحدد التاريخ ؟**

الحل :

لوكتبنا مضاعفات الفترة التي تعود فيها كل سفينة سنلاحظ :

السفينة الأولى : $4,8,12,16,20,24,28,32,36,40,44,\boxed{48},52,\ldots$

السفينة الثانية : $8,16,24,32,40,\boxed{48},56,\ldots$

السفينة الثالثة : $12,24,36,40,\boxed{48},60,\ldots$

السفينة الرابعة : $16,32,\boxed{48},64,\ldots$

لاحظ أن السفن كلها ستكون موجودة في الميناء بعد : 48 أسبوعاً ، وهو المضاعف المشترك الأصغر للأعداد ، وسنترك تحديده بصورة جبرية للنقاش أثناء المحاضرة . كذلك سنترك تحديد التاريخ كنشاط !

(12) **ماهو العدد الذي إذا قُسِم على الأعداد : $3,4,5$ لكان الباقي : 1 .**

الحل :

نفس الفكرة . المضاعف المشترك للأعداد : $lcm[3,4,5]=60$ ، ولكي يكون الباقي : 1 يكفي أن نضيف الباقي للمضاعف ، وبالتالي سيكون العدد المطلوب : 61 .

(13) عدد من ثلاث خانات إذا طُرح منه : 7 لكان الناتج يقبل القسمة على : 7 ، وإذا طُرح منه : 8 لكان الناتج يقبل القسمة على : 8 ، وإذا طُرح منه : 9 لكان الناتج يقبل القسمة على : 9 ، فما هو العدد .

الحل :

لكي يقبل العدد القسمة على الأعداد الثلاثة حتى بعد الطرح ، فيجب أن يكون مضاعفاً مشتركاً لهذه الأعداد الثلاثة . إذاً فالنوجد المضاعف المشترك لهذه الأعداد : $lcm[7,8,9]=504$. لاحظ أن الأعداد أولية نسبياً فيما بينها . العدد : 504 مضاعف لجميع الأعداد ، فإذا طرحنا منه أيٍ منها سيبقى مضاعفاً لها ، وبالتالي سيقبل القسمة على أيٍ منها .

(14) لأي عددين : $a,b\in\mathbb{Z}^{+}$. أثبت أن : $\gcd(a,b)=\gcd(a+b,lcm[a,b])$

الحل :

نفرض أن :

$$\gcd(a,b)=d \quad , \quad \gcd(a+b,lcm[a,b])=d' \quad , \quad lcm[a,b]=m \quad , \quad a=da' \quad , \quad b=db'$$

الآن : $d\mid a\ ,\ d\mid b$ هذا يقتضي أن : $d\mid a+b$ من خواص القاسم ، و $d\mid m$ لأن : $a,b\mid m$ من خواص المضاعف . إذاً : $d\mid d'\cdots(1)$.

الآن : $d'\mid d\cdot a'b'$ من العلاقة بين القاسم ، والمضاعف ، ولكن : $(a',b')=1$.

إذا كان : $d'\mid d,a',b'$ فقد انتهى الإثبات . نفرض أن : $d'\nmid d$. إذاً : $d'\mid a'b'$ ، وبالتالي : $d'=a'b'$.

الآن : $a+b=d(a'+b')$ ، وبالتالي : $a'b'\mid a'+b'$ ، وهذا لن يتحقق إلا إذا كان : $a'=b'=1$ لأن : $(a',b')=1$. إذاً : $d'\mid d\cdots(2)$. إذاً من : $(1),(2)$ سنجد أن : $d=d'$.

(8) مسائل إضافية على الدرس :

(1) أوجد : $lcm[588,44]$, $lcm[2261,1275]$.

(2) باستخدام التحليل إلى عوامل أوجد المضاعف المشترك الأصغر لكل من :

(a) 36 , 45 (b) 522 , 87 (c) 1024 , 118098

(3) عدد الأعداد المربعة الكاملة ، والتي أكبر من : 1 ، وأصغر من : 1432 ، وتقبل القسمة على : $2,5$

.

(4) أوجد باقي قسمة العدد : $23^{2011}+25$. على : $lcm[8,12]$.

(5) أوجد باقي قسمة العدد : 12345678901234567890 . على : 9 .

(6) ماهو أصغر قاسم أولي للعدد : $5^{2011}+7^{1432}$.

(7) إذا كان : $lcm[8,n]=24$, $\gcd(8,n)=4$. أوجد : n .

(9) ماهو أصغر عدد صحيح يقبل القسمة على أول خمسة أعداد مؤلفة موجبة .

(10) ماهو أصغر عدد صحيح إذا قُسم على أي من الأعداد من : 2 إلى : 9 كان الباقي : 1 .

(11) أوجد كل الأعداد الفردية : $a,b\in\mathbb{Z}^+$. التي تحقق : $\gcd(a,b)+b=lcm[a,b]+a=8$.

(12) إذا كان : $12!=47a001600$. أوجد : a . حيث : $n!$ تعني مضروب : n .

(13) أوجد كل العوامل الأولية للعدد : 1000027 .

(14) إذا كان : $lcm[a,b]=m$, $\gcd(a,b)=d$. أثبت أن : $d\mid m$.

(15) لأي عدد صحيح : k . أثبت أن : $lcm[9n+8,6n+5]=45n^2+93n+40$.

(16) إذا كان : $a,b\in\mathbb{Z}^+$. تُحقِّق : $a+b=5432$ ، و $lcm[a,b]=223020$. أوجد : a,b .

المحاضرة الخامسة

التطابقات

Congruences

التطابقات هو تعبير آخر لمفهوم قابلية القسمة قُدِّم من قبل العالم الألماني يوهان كارل فريدريش غاوس *Johann Carl Friedrich Gauss* بطريقة جعلته أداة فعالة لتسهيل البراهين ووسيلة أخرى لدراسة نظرية الأعداد .

(1) مفهوم التطابقات :

إذا كان : $n \in \mathbb{Z}^*$ ، $a,b \in \mathbb{Z}$ ، فيقال عن a أنه يطابق ، أو يوافق *Congruences* b قياس n ، ونكتب : $a \equiv b \pmod n$. إذا كان : $n \mid a-b$.

وإذا كان : a لا يطابق ، أو يوافق *Congruences* b قياس n ، فيكتب : $a \not\equiv b \pmod n$.

فمثلاً :

$29 \equiv 1 \pmod 2$: تعني أن باقي قسمة : 29 على : 2 تساوي : 1 ، أو أن : $2 \mid 29-1$ أو أن : $29,1$ لهما نفس الباقي عند قسمتهما على : 2 .

لاحظ كما قلنا سابقاً التطابقات هي صورة أخرى لقابلية القسمة فيمكن كتابة التطابق : $29 \equiv 1 \pmod 2$ باستخدام خوارزمية القسمة على الصورة : $29 = 2 \times 14 + 1$.

أمثلة أخرى :

$16 \equiv 0 \pmod 8$ ، $3^{2010} \equiv 1 \pmod 2$ ، $16^{1431} \equiv 6 \pmod{10}$

بينما :

$31 \not\equiv 1 \pmod 4$ ، $16 \not\equiv 0 \pmod 5$ ، $3^{2010} \not\equiv 1 \pmod{10}$ ، $16^{1431} \not\equiv 6 \pmod 2$

$31 \not\equiv 1 \pmod 4$: وتعني أن $4 \nmid 31-1 = 30$.

(2) خصائص التطابقات :

(1) لكل عدد : $a \in \mathbb{Z}$ ، فإن : $a \equiv a \pmod m$. تحقق خاصية الانعكاس . *reflexive* .

(2) لكل : $a, b \in \mathbb{Z}$ ، إذا : $a \equiv b \pmod m$ ، فإن : $b \equiv a \pmod m$ تحقق خاصية التماثل . *Symmetric* .

(3) لكل : $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ، إذا : $a \equiv b \pmod m$ ، و $b \equiv c \pmod m$ ، فإن : $a \equiv c \pmod m$ تحقق خاصية التعدي . *Transitive* .

(4) لكل : $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. إذا : $a \equiv b \pmod m$ ، و $c \equiv d \pmod m$ ، فإن :

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod m \quad \text{، و} \quad a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod m$$

وبصورة عامة إذا كان : $k \in \mathbb{N}$, $b_1, \dots, b_k$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$ ، بحيث : $a_i \equiv b_i \pmod m$ ، و $1 \le i \le k$ ، فإن :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \equiv b_1 + b_2 + \cdots + b_k \pmod m \ .$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_k \equiv b_1 \cdot b_2 \cdots b_k \pmod m$$

(6) لكل : $a, b \in \mathbb{Z}$ ، و $n \in \mathbb{Z} \ge 0$. إذا : $a \equiv b \pmod m$ ، فإن : $a^n \equiv b^n \pmod m$.

(7) لكل : $a, b, c \in \mathbb{Z}$ بحيث : $a \equiv b \pmod m$ ، فإن : $ac \equiv bc \pmod m$.

إثبات بعض الخواص :

(1) بما أن : $a \equiv a \pmod m$ تكافئ أن : $m \mid a - a = 0$ ، وهذا متحقق .

(2) بما أن : $a \equiv b \pmod m$ هذا يكافئ أن : $m \mid a - b$ إذاً يوجد عدد يحقق أن : $a - b = km$ بالضرب في : -1 سنجد أن : $b - a = (-k)m$ ، وبالتالي : $m \mid b - a$ لأن كل الأعداد صحيحة ، وبالتالي : $b \equiv a \pmod m$.

سنترك البقية كتطبيق للطلاب في المحاضرة . ويمكن إثباتها من تحويل التطابق لخوارزمية القسمة .

(3) خصائص إضافية مع إثباتها :

(1) لكل : $m \in \mathbb{Z}^+$ أثبت أنه إذا كان : $a \equiv b \pmod{m}$ ، فإن باقي قسمة : a على : m يساوي باقي قسمة : b على : m .

الإثبات :

نفرض أن : $a = mq_1 + r_1 \cdots (1)$ ، $b = mq_2 + r_2 \cdots (2)$. الآن بما أن : $a \equiv b \pmod{m}$ هذا يقتضي أن : $m \mid a-b$ ، كذلك : $m \mid mq_1 - mq_2 = m(q_1 - q_2)$ ، وهذا يقتضي أن :

$$m \mid (a-b) \pm m(q_1 - q_2)$$

الآن بطرح : $(1)-(2)$ سنجد أن :

$$(a-b) = m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2) \Rightarrow (a-b) - m(q_1 - q_2) = (r_1 - r_2)$$

استنتجنا أن : $m \mid (a-b) \pm m(q_1 - q_2)$. إذاً : $m \mid (r_1 - r_2)$ ، ولكن : $0 \le |r_1 - r_2| < m$ لأنها باقي القسمة ، وهذا لايتحقق إلا إذا كان : $r_1 - r_2 = 0$. إذاً : $r_1 = r_2$.

(2) إذا كان : $ac \equiv bc \pmod{m}$ ، فإن : $ac \equiv bc \left(\bmod \left(\frac{m}{d} \right) \right)$ ، حيث : $d = \gcd(m, c)$.

الإثبات :

بما أن : $ac \equiv bc \pmod{m}$. إذاً : $m \mid ac - bc = c(a-b)$ ، وبالتالي يوجد عدد صحيح : $k \in \mathbb{Z}$ يحقق : $c(a-b) = km$. بقسمة الطرفين على : d سنجد أن : $\left(\frac{c}{d} \right)(a-b) = k\left(\frac{m}{d} \right)$.

تذكر أن : $\gcd\left(\frac{m}{d}, \frac{c}{d} \right) = 1$. من خواص القاسم . إذاً : $\frac{m}{d} \mid (a-b)$ لأن : $\left(\frac{m}{d} \right) \nmid \left(\frac{c}{d} \right)$ ، و $k = \dfrac{\left(\frac{c}{d} \right)(a-b)}{\left(\frac{m}{d} \right)}$ يمثل عدد صحيح . إذاً : $a \equiv b \left(\bmod \left(\frac{m}{d} \right) \right)$.

فائدة : إذا كان : $ac \equiv bc \pmod{m}$ ، و $\gcd(m, c) = 1$ ، فإن : $a \equiv b \pmod{m}$.

(4) أمثلة عددية على هذه الخواص :

(1) إذا كان : $13 \equiv 3 \pmod 5$. لاحظ أن : $5 \mid 13 - 3 = 10$ ، كذلك : $13 = 2 \times 5 + 3$ ، فإن باقي قسمة : 13 على : 5 تساوي : 3 . كذلك عند قسمة : 3 على : 5 ، فإن الباقي يساوي : 3 لأننا يمكن كتابته على الصورة : $3 = 0 \times 5 + 3$.

(2) إذا كان : $4 \equiv 1 \pmod 3$ ، فإن : $5 \times 4 = 20 \equiv 5 \times 1 \pmod 3$ ، وهذا يكافئ : $20 \equiv 2 \pmod 3$ ، ويكافئ أيضاً : $20 \equiv -1 \pmod 3$.

(3) إذا كان : $16 \equiv 4 \pmod 6$ ، فإن هذا يكافئ : $2 \times 8 \equiv 2 \times 2 \pmod 6$ ، وبما أن : $(2,6) = 2$ إذاً التطابق يكافئ : $8 \equiv 2 \pmod 3$.

لاحظ أننا لانستطيع أن نختصر العامل المشترك إلا إذا كان القاسم المشترك بين القاسم ، والعدد الذي سنختصره يساوي الواحد أو كنا نستطيع أن نقسم القاسم على العامل المشترك بينه ، وبين العدد المختصَر .

(5) أهم مسائل التطابقات :

إذا كان لدينا التطابق على الصورة : $a \equiv b \pmod m$ ، فإن : b يمكن أن يحدد أنواع المسائل التالية :

(1) إيجاد باقي قسمة عدد على عدد آخر ، وتمثله : b ، وهذا مثال :

مثال : أوجد باقي قسمة : 2^{1432} على : 3 .

نعلم أن : $2 \equiv -1 \pmod 3$ ، بالرفع للقوة : 1432 من خواص التطابقات سنجد أن : $2^{1432} \equiv (-1)^{1432} \pmod 3$ ، وهذا يكافئ : $2^{1432} \equiv 1 \pmod 3$ لأن الأس زوجي . إذاً الباقي يساوي : 1 .

(2) إثبات قابلية قسمة عدد على عدد آخر ، وتمثله : $b = 0$ ، وهذا مثال :

مثال : أثبت أن العدد : $7^{2011} - 2^{2011}$ يقبل القسمة على : 5 .

بالتطابقات : $7 \equiv 2 \pmod 5$ بالرفع للقوة : 2011 يصبح التطابق : $7^{2011} \equiv 2^{2011} \pmod 5$ كذلك : $2 \equiv 2 \pmod 5$ ، بالرفع للقوة : 2011 يصبح التطابق على الصورة : $2^{2011} \equiv 2^{2011} \pmod 5$ بطرح التطابقين سنجد أن : $7^{2011} - 2^{2011} \equiv 2^{2011} - 2^{2011} \equiv 0 \pmod 5$. إذاً : $5 \mid 7^{2011} - 2^{2011}$.

(3) **تحديد خانة الآحاد ، والعشرات ، والمئات ، وتمثله : b :**

عند قسمة العدد : 23 على : 10 لكان الباقي : 3 لاحظ أن : 3 هي خانة الآحاد في العدد : 23 .

عند قسمة العدد : 432 على : 100 لكان الباقي : 32 ، وهي تمثل خانتي الآحاد ، والعشرات في العدد .

عند قسمة العدد : 1432 على : 1000 لكان الباقي : 432 ، وهي تمثل الآحاد ، والعشرات ، والمئات .

إذاً : إذا طلب في السؤال خانة الآحاد لعدد كل ماعلينا هو إيجاد ناتج التطابق مقياس : 10 ، و إذا طلب في السؤال خانة الآحاد ، والعشرات أو العشرات وحدها ، فكل ماعلينا هو إيجاد ناتج التطابق مقياس : 100 ، وهكذا .

مثال : أوجد خانة الآحاد للعدد : 3^{1432} .

بإيجاد التطابق مقياس : 10 سنجد أن :

$$9 = 3^2 \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow (3^2)^{716} \equiv (-1)^{716} \pmod{10} \Rightarrow 3^{1432} \equiv 1 \pmod{10}$$

إذاً : خانة الآحاد تساوي : 1 .

مثال : أوجد خانة الآحاد للعدد : 7^{2011} .

بإيجاد التطابق مقياس : 10 سنجد أن :

$$7^2 \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow (7^2)^{1005} \equiv (-1)^{1005} \pmod{10} \Rightarrow 7^{2010} \equiv -1 \pmod{10}$$
$$\Rightarrow 7 \times 7^{2010} \equiv 7 \times -1 \pmod{10} \Rightarrow 7^{2011} \equiv -7 \pmod{10} \Rightarrow 7^{2011} \equiv 3 \pmod{10}$$

إذاً : خانة الآحاد تساوي : 3 .

مثال : أوجد خانة الآحاد ، والعشرات للعدد : 13^{15} .

بإيجاد التطابق مقياس : 100 سنجد أن :

$$13^2 \equiv 169 \equiv 69 \pmod{100} \Rightarrow 13 \times 13^2 \equiv 13 \times 69 \equiv 897 \equiv -3 \pmod{100}$$
$$\Rightarrow (13^3)^5 \equiv (-3)^5 \pmod{100} \Rightarrow 13^{15} \equiv -243 \equiv 57 \pmod{100}$$

إذاً : خانتي الآحاد ، والعشرات هما : 57 .

وستأتي أفكار متنوعة للمسائل ضمن التطبيقات .

(7) مسائل محلولة على الدرس :

(1) **أوجد باقي قسمة :** $1^1+2^2+3^3+\cdots+2010^{2010}$ **على :** 2 .

الحل :

لكل عدد فردي : a ، فإن : $a^a\equiv 1\bmod(2)$. ولكل عدد زوجي : b ، فإن : $b^b\equiv 0\bmod(2)$

الآن : عدد الأعداد الفردية المحصورة بين : $1,2010$ تساوي : 1005 عدد فردي .

إذاً : $1^1+2^2+3^3+\cdots+2010^{2010}\equiv 1005\equiv 1\bmod(2)$

لاحظ أن : 1005 **عند قسمتها على :** 2 **، فإن الباقي :** 1 .

(2) **ماهي آخر خانتين من العدد :** 17^{17} .

الحل :

آخر خانتين في العدد هما خانتا الآحاد ، والعشرات . باستخدام مفكوك ذات الحدين :

$$(7+10)^{17}=7^{17}+17\cdot 7^{16}\cdot 10+\cdots$$

نلاحظ أن هذه الحدود فقط لا تقبل القسمة على : 100 بأخذ التطابق :

$$7\cdot\left(7^4\right)^4\equiv 7\cdot(1)^4\equiv 7\bmod(100)$$

والحد الثاني بسهولة سنجد أن : $17\cdot\left(7^4\right)^4\cdot 10\equiv 17\cdot(1)^4 10\equiv 70\bmod(100)$

وبجمع التطابقين سنجد أن : $17^{17}\equiv 7\cdot\left(7^4\right)^4+17\cdot\left(7^4\right)^4\cdot 10\equiv 77\bmod(100)$.

(3) **أوجد باقي قسمة :** 6^{1987} **على :** 37 .

الحل :

$$6^{1987}\equiv 6\cdot 6^{1986}\equiv 6\cdot\left(6^2\right)^{993}\equiv 6\cdot(36)^{993}\equiv 6\cdot(-1)^{993}\equiv -6\equiv 31(\bmod 37)$$

إذاً الباقي يساوي : 31 .

(4) **أثبت أن : $12233 \cdot 455679 + 87653^3$ تقبل القسمة على : 4 .**

الحل :

لاحظ أن العدد : 12233 عبارة عن حاصل جمع : $12200 + 32 + 1$. إذاً : $12200 \equiv 0 \pmod 4$

كذلك : $32 \equiv 0 \pmod 4$. إذاً : $12233 \equiv 12200 + 32 + 1 \equiv 0 + 0 + 1 \equiv 1 \pmod 4$.

بالمثل : $455679 \equiv 455600 + 76 + 3 \equiv 0 + 0 + 3 \equiv 3 \pmod 4$

أيضاً : $87653 \equiv 87600 + 52 + 1 \equiv 0 + 0 + 1 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 87653^3 \equiv 1 \pmod 4$

إذاً : $12233 \cdot 455679 + 87653^3 \equiv 1 \times 3 + 1 \equiv 4 \equiv 0 \pmod 4$

إذاً : $4 \mid 12233 \cdot 455679 + 87653^3$ لأن الباقي يساوي صفراً .

(5) **أثبت أن : $2^{32} + 1$ تقبل القسمة على : 641 .**

الحل :

لاحظ أن : $641 = 2^7 \times 5 + 1 = 5^4 + 2^4$. الآن :

$2^7 \times 5 \equiv -1 \pmod{641} \Rightarrow (2^7 \times 5)^4 \equiv (-1)^4 \pmod{641} \Rightarrow 2^{28} \times 5^4 \equiv 1 \pmod{641}$.

ولكن : $5^4 + 2^4 \equiv 0 \pmod{641} \Rightarrow 5^4 \equiv -2^4 \pmod{641}$. إذاً :

$$2^{28} \times -2^4 \equiv 2^{32} \equiv -1 \pmod{641} \boxed{\Rightarrow 2^{32} + 1 \equiv 0 \pmod{641}}$$

إذاً : $641 \mid 2^{32} + 1$ لأن الباقي يساوي صفراً .

(6) **أثبت أنه يوجد عدد لانهائي من الأعداد الصحيحة : n التي تحقق : $7 \mid 2^n + 27$.**

الحل :

بالتجربة سنجد أن : $2^3 \equiv 8 \equiv 1 \pmod 7$. بالرفع لأي قوة : $k \in \mathbb{N}$ سنجد أن :

$2^{3k} \equiv 1 \pmod 7$ ، وبالتالي : $2^{3k} + 27 \equiv 1 + 27 \equiv 28 \equiv 0 \pmod 7$. إذاً : $n = 3k$.

ويوجد عدد لانهائي من الأعداد الصحيحة على الصورة : $n = 3k$. أي أن : $n = 3, 6, 9, \ldots$.

(7) **أوجد جميع الأعداد الصحيحة الموجبة : n التي تحقق :** $5 \mid 3^n + 2^n$.

الحل :

بالتجربة سنجد أن :

$$9 \equiv 3^2 \equiv -1(\bmod 5) \Rightarrow 3^{2k} \equiv (-1)^k (\bmod 5) \boxed{\Rightarrow 3^{2k+1} \equiv 3(-1)^k (\bmod 5)}$$

أيضاً :

$$4 \equiv 2^2 \equiv -1(\bmod 5) \Rightarrow 2^{2k} \equiv (-1)^k (\bmod 5) \boxed{\Rightarrow 2^{2k+1} \equiv 2(-1)^k (\bmod 5)}$$

بالجمع سنجد أن :

$$3^{2k+1} + 2^{2k+1} \equiv 3(-1)^k + 2(-1)^k \equiv 5(-1)^k \equiv 0(\bmod 5) \Rightarrow 3^{2k+1} + 2^{2k+1} \equiv 0(\bmod 5)$$

إذاً قيمة : $n = 2k+1$ ، $k = 0,1,2,\ldots$. أي قيم : n هي كل الأعداد الصحيحة الفردية .

(8) **أثبت أن : 7 تقسم العدد :** $2222^{5555} + 5555^{2222}$.

الحل :

$$2222 \equiv 3 \bmod (7) \Rightarrow 2222^{5555} \equiv 3^{5555} \equiv (3^5)^{1111} \equiv (243)^{1111} \equiv (5)^{1111} \bmod (7)$$
$$5555 \equiv 4 \bmod (7) \Rightarrow 5555^{2222} \equiv 4^{5555} \equiv (4^5)^{1111} \equiv (-5)^{1111} \bmod (7)$$
$$\Rightarrow 2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv (5)^{1111} + (-5)^{1111} \equiv 0 \bmod (7)$$

توضيح : لاحظ أن : $(243)^{1111} \equiv (5)^{1111} \bmod (7)$ لأن : 243 عند قسمتها على : 7 ، فإن الباقي : 5 .

(9) **أثبت أن :** $n^2 \equiv 0,1(\bmod 3)$.

الحل :

بواقي قسمة أي عدد على : 3 هي : $0,\pm 1$ لاحظ أن الباقي السالب بديل عن الباقي : 2 .

إذاً : $n \equiv 0,\pm 1(\bmod 3) \Rightarrow n^2 \equiv 0,1(\bmod 3)$.

(10) **إذا كان :** p **عدد أولي أكبر من :** 3 **: أثبت أن :** $7^p - 6^p - 1$ **تقبل القسمة على :** 43 .

الحل :

أي عدد أولي : $p > 3$ يمكن كتابته على إحدى الصورتين : $3k+1$ حيث : k عدد زوجي ، أو على الصورة : $3k+2$ حيث : k عدد فردي . الآن ندرس الحالتين التاليتين :

الحالة الأولى : إذا كان : $p = 3k+1$ ، فإن :

$$7^p \equiv 7^{3k+1} \equiv 7\cdot\left(7^3\right)^k \equiv 7\cdot(-1)^k \equiv 7 \pmod{43}$$
$$6^p \equiv 6^{3k+1} \equiv 6\cdot\left(6^3\right)^k \equiv 6\cdot(1)^k \equiv 6 \pmod{43}$$
$$\boxed{\Rightarrow 7^p - 6^p - 1 \equiv 7-6-1 \equiv 0 \pmod{43}}$$

الحالة الثانية : إذا كان : $p = 3k+2$ ، فإن :

$$7^p \equiv 7^{3k+2} \equiv 7^2\cdot\left(7^3\right)^k \equiv 6\cdot(-1)^k \equiv -6 \pmod{43}$$
$$6^p \equiv 6^{3k+2} \equiv 6^2\cdot\left(6^3\right)^k \equiv -7\cdot(1)^k \equiv -7 \pmod{43}$$
$$\boxed{\Rightarrow 7^p - 6^p - 1 \equiv -6-(-7)-1 \equiv 0 \pmod{43}}$$

إذاً : $43 \mid 7^p - 6^p - 1$.

(11) **أوجد كل الحلول الصحيحة للمعادلة :** $x^2 - 5y^2 = 2$.

الحل :

مثل هذه المسائل نحاول ندرس التطابق لمقياس مناسب ، وهنا يمكن أن ندرس التطابق مقياس : $\pmod 5$ لكونها معامل لأحد الحدود .

الآن نعيد كتابة المعادلة على الصورة : $x^2 = 5y^2 + 2$. لاحظ أن : $5 \mid 5y^2$. إذاً :

$5y^2 \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow 5y^2 + 2 \equiv 2 \pmod 5$. إذاً الطرف اليمن يطابق : 2 مقياس : 5 .

كل عدد صحيح : x على إحدى الصور التالية : $5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4$ بتربيعها سنجد أن :

$x^2 \equiv 0,1,4 \pmod 5$ ، وبالتالي الطرف الأيسر يطابق : $0,1,4$ مقياس : 5 . إذاً لاتوجد حلول صحيحة للمعادلة : $x^2 - 5y^2 = 2$ لاختلاف بواقي الطرفين عند قسمتهما على : 5 .

(12) إذا كان : $n = 8k + 7$. أثبت عدم إمكانية كتابة : n كمجموع ثلاثة مربعات .

الحل :

أي عدد صحيح يمكن كتابته على إحدى الصور التالي : $8k, 8k \pm 1, 8k \pm 2, 8k \pm 3, 8k + 4$ ، وتذكّر أن البواقي السالبة هي بديل عن البواقي الأخرى عند قسمة أي عدد على : 8 ، فمثلاً : -3 هي بديل الباقي : 5 .

الآن : $m \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, 4 \pmod 8 \Rightarrow m^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 8$. إذاً بواقي قسمة أي عدد مربع كامل على : 8 هي : $0, 1, 4$.

الآن عند جمع ثلاثة مربعات نحصل على : $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \pmod 8$.

إذاً مجموع ثلاثة مربعات لايمكن أن يطابق : 7 مقياس : 8 ، وبالتالي لايمكن أن يكون : n حاصل جمع ثلاثة مربعات .

(13) إذا كان : 792 يقسم العدد : $13xy45z$ أوجد قيم الخانات .

الحل :

من تحليل العدد : $792 = 8 \times 9 \times 11$. الآن العدد يقبل القسمة على : 8 . إذاً العدد المكون من الخانات الثلاث الأولى تقبل القسمة على : 8 . أي العدد : $45z$ يقبل القسمة على : 8 ، وبالتالي يجب أن تكون الخانة الأولى: z عدد زوجي . بالتجربة للأعداد : $2, 4, 6, 8$ سنجد أن : $\boxed{z = 6}$.

كذلك العدد يقبل القسمة على : 9 . إذاً مجموع خاناته يقبل القسمة على : 9. إذاً :

$$1 + 3 + x + y + 4 + 5 + 6 \equiv 0 \pmod 9 \Rightarrow x + y \equiv -19 \equiv -10 \equiv -1 \equiv 8 \pmod 9$$

إذاً : $x + y = 8$ بالمثل : بما أن العدد يقبل القسمة على : 11 إذاً من خصائص القسمة على : 11 سنجد أن :

$$\begin{aligned} 6 - 5 + 4 - y + x - 3 + 1 \equiv 0 \pmod{11} &\Rightarrow x - y + 3 \equiv \pmod{11} \\ &\Rightarrow x - y \equiv -3 \pmod{11} \\ &\Rightarrow x - y \equiv 8 \pmod{11} \end{aligned}$$

إذاً : $x - y = 8$. بحل المعادلتين سنجد أن : $\boxed{x = 8 \ , \ y = 0}$.

إذاً العدد هو : 1380456

(14) **أوجد خانتي الآحاد ، والعشرات للعدد :** 7^{7^7}

الحل :

لاحظ أن : $7^4 \equiv 2401 \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow 7^3 \cdot 7^4 \equiv 7^7 \equiv 43 \cdot 1 \pmod{100}$.

إذاً بكتابة التطابق على صورته الخطية : $\boxed{7^7 = 100k + 43}$.

الآن : $7^4 \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow \left(7^4\right)^{25k} \equiv 1^{25k} \equiv 1 \pmod{100}$. إذاً : $7^{100k} \equiv 1 \pmod{100}$.

كذلك : $7^{43} \equiv 7^3 \cdot \left(7^4\right)^{10} \equiv 43 \cdot 1^{10} \equiv 43 \pmod{100}$. إذاً : $7^{43} \equiv 43 \pmod{100}$.

الآن :

$$7^{100k} \cdot 7^{43} \equiv 1 \cdot 43 \pmod{100} \Rightarrow 7^{100k+43} \equiv 43 \pmod{100}$$

ولكن : $100k + 43 = 7^7$. إذاً : $7^{100k+43} \equiv 7^{7^7} \equiv 43 \pmod{100}$.

إذاً خانتي الآحاد ، والمئات : 43 .

(15) **إذا كان :** $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = b^2$. **حيث :** $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b$ **أعداد صحيحة .**
أثبت أن : $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b$ **لايمكن أن تكون أعداد فردية .**

الحل :

نفرض أن جميع الأعداد فردية . الآن : بأخذ التطابق مقياس : $\pmod{8}$:

نعلم أن بواقي أي عدد على : 8 هي ضمن المجموعة : $r = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ ، وبما أننا فرضنا أن الأعداد فردية إذاً ستكون البواقي المحتملة هي : $r = \{1,3,5,7\}$ بتربيعها سنجد أن البواقي المحتملة هي : $r^2 = 1$.لأننا عندما نربع : 1 سيكون الباقي : 1 ، وعند تربيع : 3 سيكون : 9 ، وبما أن التطابق مقياس : 8 ، فإن الباقي سيبقى : 1 ، وهكذا البقية .

الآن : $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 \equiv 5 \pmod{8}$ ، بينما : $b^2 \equiv 1 \pmod{8}$ ، وهذا تعارض . إذاً جميع الأعداد زوجية .

(8) مسائل إضافية على الدرس :

(1) أوجد خانة الآحاد في الأعداد :

(a) 42^{1337} (b) $223^{12} - 44^{15}$ (c) $9^{1003} - 7^{902} + 3^{801}$

(2) أوجد خانتي الآحاد ، والعشرات للأعداد :

(a) 3^{100} (b) $(207^{19} - 41)^{10}$ (c) 9^{9^9}

(3) أوجد باقي قسمة : 13^9 على : 14 .

(4) أوجد أول خانة في العدد : $286384 \times 372617154987 \times 15148265$.

(5) أوجد باقي قسمة : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 98^2 + 99^2$ على : 9 .

(6) أثبت أن : $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ تقبل القسمة على : 7 .

(7) أوجد كل القيم الصحيحة : n التي تحقق أن : $7 \mid 3^n - 2$.

(8) أثبت أن : 2010 تقسم : $2011^{1431} + 2011^{1430} + \cdots + 2011 + 1 - 1432$.

(9) أثبت أن المعادلة : $x^2 - 7y^2 = 3$ ليس لها حلول صحيحة .

(10) أثبت أنه إذا كان : $7 \mid a^2 + b^2$ ، فإن : $7 \mid a$ ، $7 \mid b$ لكل : $a, b \in \mathbb{Z}$.

(11) أثبت أن :

(a) $n^2 \equiv 0, \pm 1 \pmod 5$ (b) $n^2 \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod 7$ (c) $n^3 \equiv 0, \pm 1 \pmod 9$

(12) أثبت أن : $7 \mid 13^{2k} + 2^{2k}$. حيث : k عدد فردي .

(13) أثبت أن المعادلة : $x^2 + y^2 + z^2 = 800000007$ ليس لها حلول صحيحة .

(14) إذا كان : 72 يقسم العدد : $72x20y2$. أوجد : x , y .

(15) أوجد جميع الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة : $n_1^4 + n_2^4 + n_3^4 + \cdots + n_{14}^4 = 1599$.

(16) أثبت أنه إذا كان العدد : $k \in \mathbb{Z}$ يقبل القسمة على : 3 ، فإن مجموع خاناته يقبل القسمة على : 3 .

(17) كتبنا الأعداد الصحيحة ذات خانتين من : 19 إلى 92 بالتتالي لتُكوِّن الرقم الصحيح الكبير :

$$N = 19202122 \cdots 909192$$

لنفرض أن : k أكبر أس للعدد : 3 يقسم N هو 3^k ، فما هي قيمة k ؟

المحاضرة السادسة

النظم العددية

Numerical Systems

يعد استخدام الأرقام كوسيلة للعد والحساب من الإنجازات الهامة التي حققها الإنسان عبر التاريخ والتي ساهمت في تسهيل كافة العمليات الحسابية وتسريعها . فقد استخدم الإنسان منذ القدم الكثير من الأدوات لتمثيل عمليات العد والحساب ومنها استخدامه لأصابع يده العشرة ، والتي كانت الأساس للنظام العددي والذي لا يزال معمول به حتى يومنا هذا والمسمى بالنظام العشري *Decimal System* .

فالعدد : 1432 المكون من أربع خانات هو عدد ضمن النظام العشري ، وسمي بالنظام العشري لأن الرموز التي تمثله هي الأعداد : $\{0,1,2,\ldots,9\}$. يمكننا كتابة العدد : 1432 على الصورة :

$$1432 = 1\times10^3 + 4\times10^2 + 3\times10^1 + 2\times10^0$$

لاحظ أن : 10 تظهر في هذه المتسلسلة ، ومنها يمكن كتابة أي عدد في النظام العشري على صورة متسلسلة يظهر فيها أساس النظام ، وهذا المفهوم يمكن تعميمه لأي نظام من الأنظمة العددية .

(1) نظرية :

كل عدد صحيح $k \geq 1$. بحيث : $k = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0}_{(b)}$ يقابله متتابعة $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ، و $b \geq 2 \quad , \quad 0 \leq a_i \leq b-1$. بحيث : $k = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0$.

هذه النظرية تعطينا طريقة كتابة العدد اعتماداً على أساسه ، فمثلاً العدد : $\overline{314159}_{(10)}$ مكتوب بالنظام العشري حيث أساسه : 10 ، واختصاراً في النظام العشري لانكتب الأساس . كذلك لانكتب رمز العدد ، فنكتب اختصاراً : 314159 . بينما في بقية الأنظمة نكتب أساسه ، ويمكن كتابة العدد بصورة متسلسلة كما في النظرية كالتالي :

$$314159 = 3\times10^5 + 1\times10^4 + 4\times10^3 + 1\times10^2 + 5\times10^1 + 9$$

(2) أشهر الأنظمة العددية :

طبعاً النظام العشري هو أكثر الأنظمة استخداماً ، وشهرةً ، ولكن توجد أنظمة أخرى لها أهميتها ، ومن أهمها :

(1) النظام الثنائي : *Binary System*

وهو نظام عددي أساسه العدد : (2) مقارنة بالنظام العشري الذي أساسه العدد : (10) ، أي أن عدد الرموز المستخدمة في النظام هي رمزين فقط وهما : $\{0,1\}$ لتمثيل كافة الأعداد ، ويعتبر النظام الثنائي أساس اللغة التي تتعامل بها الكمبيوترات والأنظمة الرقمية .

فمثلاً : العدد : $41_{(10)}$ في النظام العشري يمثله : $101001_{(2)}$ في النظام الثنائي . وللتأكد :

$$101001_{(2)} = 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1 = 41_{(10)}$$

(2) النظام الثماني : *Octal System*

وهو من الأنظمة المستخدمة في الحاسبات الالكترونية ، وأساسه العدد : (8) ، و الرموز المستخدمة في هذا النظام هي : $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

مثال : العدد : $31415_{(10)}$ في النظام العشري يمثله : $75267_{(8)}$ في النظام الثماني . وللتأكد :

$$75267_{(8)} = 7\times 8^4 + 5\times 8^3 + 2\times 8^2 + 6\times 8^1 + 7 = 31415_{(10)}$$

(3) النظام السادس عشري : *Hexadecimal System*

وهو من الأنظمة المهمة المستخدمة في الحاسبات الإلكترونية أساسه العدد : (16) أي أن عدد الرموز المستخدمة في تشكيل أعداد النظام عددها : 16 رمزاً ، وهي : $\{0,1,2,3,\ldots,8,9,A,B,C,D,E,F\}$ حيث : الرموز : $A,B,\ldots H$ هي بديل الأعداد : $10,11,\ldots,15$ ، و $A=10$.

مثال : العدد : $1256_{(10)}$ في النظام العشري يمثله : $4E8_{(16)}$ في النظام السادس عشري . وللتأكد :

$$4E8_{(16)} = 4\times 16^2 + 14\times 16^1 + 8 = 1256_{(10)}$$

(3) هل توجد أنظمة أخرى :

ليست هذه الأنظمة هي الوحيدة ، فيمكن تمثيل أي عدد عشري لأي أساس نريده ، فيمكن اختيار الأساس : (3) ، أو (4) ، أو (5) ، أو أي أساس نريده .

(4) التحويل من جميع الأنظمة إلى النظام العشري :

التحويل من أي أساس إلى الأساس العشري سهل جداً ، وذلك يتم بتحليل العدد إلى مراتبه اعتماداً على أساس ذلك النظام ثم إيجاد ناتج جمع الحدود ، والعدد الناتج من الجمع سيكون هو العدد في النظام العشري .

مثال : حول العدد التالي إلى النظام العشري : $3141_{(5)}$.

هذا العدد أساسه : (5) مع ضرب كل خانة في الأساس مرفوعاً له الرتبة كالتالي :

$$3141_{(5)} = 3\times5^3 + 1\times5^2 + 4\times5^1 + 1 = 375 + 25 + 20 + 1 = 421_{(10)}$$

مثال : حول العدد التالي إلى النظام العشري : $1215_{(8)}$.

$$1215_{(8)} = 1\times8^3 + 2\times8^2 + 1\times8^1 + 5 = 512 + 128 + 8 + 5 = 653_{(10)}$$

مثال : حول العدد التالي إلى النظام العشري : $3141_{(7)}$.

$$3141_{(7)} = 3\times7^3 + 1\times7^2 + 4\times7^1 + 1 = 1029 + 49 + 28 + 1 = 1107_{(10)}$$

مثال : حول العدد التالي إلى النظام العشري : $1215_{(20)}$.

$$1215_{(20)} = 1\times20^3 + 2\times20^2 + 1\times20^1 + 5 = 8825_{(10)}$$

مثال : حول العدد التالي إلى النظام العشري : $11011001_{(2)}$.

$$1101101_{(2)} = 1\times2^6 + 1\times2^5 + 0\times2^4 + 1\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1 = 109_{(10)}$$

(5) التحويل من النظام العشري إلى أي من الأنظمة الأخرى :

للتحويل من النظام العشري إلى أي من الأنظمة الأخرى نجري القسمة المتكررة على أساس العدد الذي نريد التحويل إليه فنحفظ الباقي ، ونجري القسمة على خارج القسمة ونستمر ، ثم نعيد كتابة العدد ابتداء من أسفل ، وهذه الأمثلة ستوضح الطريقة حتى يكون خارج القسمة مساوياً للواحد .

مثال : حول العدد التالي من النظام العشري إلى النظام الثنائي : $2011_{(10)}$.

		remainder
2011	2	1
1005	2	1
502	2	0
251	2	1
125	2	1
62	2	0
31	2	1
15	2	1
7	2	1
3	2	1
1	2	1
0		

إذاً : $2011_{(10)} = 11111011011_{(2)}$

وللتأكد :

$$\begin{aligned} 11111011011_{(2)} &= 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 1 \\ &= 2011_{(10)} \end{aligned}$$

مثال : حول العدد التالي من النظام العشري إلى النظام الثنائي : $400_{(10)}$.

		remainder
400	2	0
200	2	0
100	2	0
50	2	0
25	2	1
12	2	0
6	2	0
3	2	1
1	2	1
0		

إذاً : $400_{(10)} = 110010000_{(2)}$

مثال : حول العدد : 57 من الأساس : (10) إلى الأساس : (7) .

		remainder
57	7	1
8	7	1
1	7	1
0		

إذاً : $57_{(10)} = 111_{(7)}$

للتأكد : $111_{(7)} = 7^2 + 7^1 + 1 = 57_{(10)}$

مثال : حول العدد : 31415 من الأساس : (10) إلى الأساس : (8) .

		remainder
31415	8	7
3926	8	6
490	8	2
61	8	5
7	8	7
0		

إذاً : $31415_{(10)} = 75267_{(8)}$

للتأكد : $75267_{(8)} = 7\times 8^4 + 5\times 8^3 + 2\times 8^2 + 6\times 8^1 + 7 = 31415_{(10)}$

مثال : حول العدد : 1432 من الأساس : (10) إلى الأساس : (3) .

		remainder
1432	3	1
477	3	0
159	3	0
53	3	2
17	3	2
5	3	2
1	3	1
0		

إذاً : $1432_{(10)} = 1222001_{(3)}$

للتأكد : $1222001_{(3)} = 1\times 3^6 + 2\times 3^5 + 2\times 3^4 + 2\times 3^3 + 1 = 1432_{(10)}$

(6) مسائل محلولة على الدرس :

(1) أثبت أن حاصل جمع العددين : $\overline{yx}_{(10)}$, $\overline{xy}_{(10)}$. عدد مؤلف .

الحل :

نعيد كتابة العددين على صورة متسلسلة : $\overline{yx}_{(10)} = 10y + x$, $\overline{xy}_{(10)} = 10x + y$

بجمع العددين نجد أن :

$$\begin{aligned}\overline{xy}_{(10)} + \overline{yx}_{(10)} &= 10x + y + 10y + x \\ &= 11x + 11y \\ &= 11\cdot(x+y)\end{aligned}$$

وهذا عدد مؤلف .

(2) في المعادلة : $(YE)\cdot(ME) = TTT$. كل حرف يمثل خانة لعدد في النظام العشري أوجد حاصل الجمع : $E + M + T + Y$.

الحل :

يمكن تحليل العدد : $TTT = T\cdot 111 = T\cdot 3\cdot 37$. الآن بما أن :

$$(YE)\cdot(ME) = TTT = T\cdot 3\cdot 37$$

إذاً أحد العددين : YE ، أو ME يساوي : 37 لأنها من خانتين ، وفي كلا الحالتين : $E = 7$.

نفرض أن : $YE = 37$ ، وبالتالي : $ME = M7 = T\cdot 3$. الآن : حاصل ضرب : $T\times 3$ يعطينا عدد من خانتين آحاده يساوي : 7 ، و T عدد من خانة واحدة ، وهذا لايتحقق إلا إذا كان : $T = 9$ ، و $ME = 27$. إذاً : $Y = 3$, $M = 2$, $E = 7$, $T = 9$ ، وبالتالي : $E + M + T + Y = 21$.

(3) عبر عن العدد : $100100_{(2)}$ في الأساس : (10) .

الحل :

في مثل هذه المسائل نحول للأساس عشرة ، ومن ثم نحول للأساس المطلوب . كالتالي :

$$100100_{(2)} = \left(2^5 + 2^2\right)_{(10)} = 36_{(10)} = 44_{(8)}$$

(4) **ماهو العدد المكوَّن من خانتين ، ويساوي ثلاثة أضعاف حاصل جمع خاناته .**

الحل :

نفرض العدد هو : $\overline{ab}_{(10)}$. إذاً : $10a + b = 3\cdot(a+b) \Rightarrow 7a = 2b$. الآن :

قيم : $0 \le a,b \le 9$. بالتجربة سنجد أن : $a = 2 \ , \ b = 7$ ، والعدد هو : 27 .

للتأكد : $27 = 3\cdot(2+7)$.

(5) **أوجد حاصل جمع الأعداد من خانتين ، والتي تقبل القسمة على كلٍ من الخانتين .**

الحل :

نفرض أن العدد : $10a + b$. إذاً : $a \mid 10a+b \ , \ b \mid 10a+b$.

بما أن : $a \mid 10a+b$. إذاً : $a \mid b$ ، وبما أن : $b \mid 10a+b$. إذاً : $b \mid a$.

الآن : يمكن أن نكتب : $b = ka$ ، وبالتالي : $ka \mid 10a \Rightarrow k \mid 10$ ، وبالتالي : $k = 1,2,5$.

عندما : $k = 1,2,5$ يصبح العدد على إحدى الصور : $11a, 12a, 15a$ ، وبما أن : $1 \le a \le 9$ ، بالتجربة سنجد الأعداد التي تحقق : $\{11,22,33,44,55,66,77,88,99,12,24,36,48,15\}$ ، ومجموعها : 630 .

(6) **أوجد الصورة الاعتيادية للعدد الدوري :** $0.\overline{123}$.

الحل :

تعريف العدد الدوري : هو العدد الذي تتكرر بعض خاناته بصورة دورية مثل : $0.123123123\cdots$ ، ويرمز له بالرمز : $0.\overline{123}$ وهو يدل على تكرار الخانات العشرية : $1,2,3$ بصورة دورية .

نفرض أن العدد : $a = 0.\overline{123}$. بالضرب في : 1000 . الآن :

$$\begin{aligned} 1000M &= 123.\overline{123} \\ &= 123 + 0.\overline{123} = 123 + M \\ &\Rightarrow 1000M - M = 123 \\ &\Rightarrow 999M = 123 \\ &\Rightarrow M = \frac{123}{999} \end{aligned}$$

(7) أوجد كل الأعداد الصحيحة من خانتين التي تحقق أن حاصل الطرح بين العدد ، وحاصل ضرب الخانتين يساوي : 12 .

الحل :

نفرض أن خانتي العدد : a,b . إذاً : يصبح العدد على الصورة : $10a+b$.

الآن : $10a+b-ab=12$. بالتحليل :

$$10a+b-ab=12 \Rightarrow 10a+b-ab-10=2$$
$$\Rightarrow (a-1)(10-b)=2$$

بما أن الأعداد صحيحة . إذاً : $a-1=1$ ، أو $10-b=2$ ، وبالتالي : $a=2\ ,\ b=8$.

أو : $a-1=2$ ، أو $10-b=1$ ، وبالتالي : $a=3\ ,\ b=9$.

وبالتالي الأعداد هي : $28\ ,\ 39$.

(8) أوجد كل الأعداد الطبيعية : x ضمن الأساس العشري ، و التي حاصل ضرب خاناتها يساوي : $x^2-10x-22$ من العدد الأصلي .

الحل :

نفرض العدد هو : $x=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$. بما أن الأساس هو العشري إذاً يمكن كتابة العدد على الصورة :

$$x=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_1\cdot 10^1+a_0 \quad \text{،} \quad \text{حيث : } a_n\neq 0 \text{ ، و } a_k\leq 9$$

الآن نفرض أن : $f(x)=x^2-10x-22$. إذاً :

$$f(x)=x^2-10x-22=a_n\cdot a_{n-1}\cdots a_1\cdot a_0\leq 9^n<10^n a_n\leq x$$

من هذه المتباينة تستفيد فائدة مهمة ، وهي أن ناتج حاصل ضرب خانات العدد دوماً أصغر من العدد نفسه .

إذاً : $f(x)=x^2-10x-22\leq x$ ، الآن عندما : $x\leq 9$ سنلاحظ أن المعادلة لا تتحقق لأن حاصل الضرب لن يكون عدداً سالباً ، وعندما : $x\geq 13$ لن تتحقق المتباينة ، وبالتالي : $x=10,11,12$. بالتجربة سنجد أن العدد الذي يحقق هو : $x=12$ فقط . حاصل ضرب خاناته يساوي : 2 ، وبالتعويض عن قيمة $x=2$ في المعادلة سيكون الناتج مساوياً لـ 2 .



(9) أوجد أصغر عدد صحيح بحيث إذا حذفنا الخانة الأولى ، فإن العدد المتبقي أصغر بـ : 57 مرة من العدد الأصلي .

الحل :

نفرض العدد على الصورة : $10^n x + y$. حيث : y تمثل بقية الخانات . إذاً :

$$5y = 10^n x + y \Rightarrow 56y = 10^n x \Rightarrow 8 \times 7 \times y = 10^n x$$

الآن : بما أن : 7 عامل . إذاً : $7 \mid 10^n x$ ، ولكن : $7 \nmid 10^n$. إذاً : $7 \mid x$ ، وبما أن : $1 \le x \le 9$.

إذاً : $x = 7$ لأن : x إحدى خانات العدد . الآن : $8y \mid 10^n$ ، وبالتالي : $1000y \mid 125 \cdot 10^n$. إذاً :

$$y = 125 \times \frac{10^n}{1000} \Rightarrow y = 125 \times 10^{n-3} \ , n \ge 3$$

إذاً أصغر قيمة تحقق عندما : $n = 3$ ، وبالتالي : $y = 125$ ، والعدد هو : 7125 .

وللتحقق : $7125 = 57 \times 125$.

(10) أوجد عدد من أربع خانات : $abcd$ يحقق : $4 \cdot abcd = dcba$.

الحل :

بما أن : $4 \cdot abcd = dcba$ سنستنتج أن العدد : $dcba$ زوجي . كذلك سنستنتج أن : $a < 3$ لأنه إذا كان : $a \ge 3$ ، فإن العدد الناتج بعد ضربه في : 4 سيكون من خمس خانات . مثلاً : $4 \times 3000 = 12000$.

الآن : بما أن : $dcba$ عدد زوجي . إذاً : a عدد زوجي ، وبالتالي : $a = 2$. إذاً يصبح العدد على الصورة : $4 \cdot 2bcd = dcb2$. إذاً : $d \ge 8$ ، ولكن خانة الآحاد في العدد : $dcb2$ تساوي : 2 . إذاً يجب أن يكون خانة الآحاد في حاصل الضرب : $4 \times d$ مساوياً لـ 2 ، وهذا لن يتحقق إلا إذا كان : $d = 8$. إذاً يصبح العدد على الصورة : $4 \cdot 2bc8 = 8cb2$. نعيد كتابة العدد على صورته العشرية :

$$8000 + 400b + 40c + 32 = 8000 + 100c + 10b + 2$$

وبالتالي : $390b + 30 = 60c$ وبالقسمة على : 30 يصبح العدد على الصورة : $13b + 1 = 2c$. الآن الطرف الأيمن عدد موجب يجب أن يكون قيمته : $2c \le 18$ ، وهذا لن يتحقق إلا إذا كان : $b < 2$.

إذاً : $b = 1$ ، وبالتالي العدد هو : $abcd = 2178$

(11) **أوجد قيمة العدد الصحيح** : m **الذي يحقق أن** : $\overline{71}_{(m)} = 3 \times \overline{17}_{(m)}$.

الحل :

نعيد كتابة العدد على صورة متسلسلة : $7m+1 = 3\times\left(m+7\right)$ ، وبالتالي :

$$7m+1 = 3m+21 \Rightarrow 4m = 20 \Rightarrow \boxed{m=5}$$

(12) **أوجد قيم** : b **بحيث** : $5 \mid \overline{1111}_{(b)}$.

الحل :

نعيد كتابة العدد على صورة متسلسلة : $\overline{1111}_{(b)} = b^3+b^2+b+1$ ، و $b \geq 2$.

نفرض أن باقي قسمة : b^3+b^2+b+1 على : 5 تساوي : r ، و $r = 0,1,2,3,4$ ، ولكي يقبل العدد القسمة على : 5 يجب أن يكون الناتج : r^3+r^2+r+1 يقبل القسمة على : 5 ، وبالتجربة سنجد أن القيم التي تحقق هي : $r = 2,3,4$ ، وبالتالي قيم : b هي : $b = 5k+2\ ,\ 5k+3\ ,\ 5k+4$ ، و $k = 0,1,2,\ldots$.

(13) **أثبت ضمن الأساس** : (7) **أي عدد صحيح يكون زوجياً إذا وإذا فقط كان مجموع خاناته عدداً زوجياً.**

الحل :

نثبت الطرف الأول : نفرض أن : $\overline{a_n \cdots a_0}_{(7)} = a_n 7^n + a_{n-1}7^{n-1} + \cdots + a_1 7 + a_0$ عدد زوجي أي أن العدد يقبل القسمة على : 2 ، وبالتالي :

$$m_{(7)} \equiv a_n 7^n + a_{n-1}7^{n-1} + \cdots + a_1 7 + a_0 \equiv 0 \left(\bmod 2\right)$$

بما أن : $7^n \equiv 1\left(\bmod 2\right)$ لكل : $n \in \mathbb{N}$ إذاً :

$$a_n 7^n + a_{n-1}7^{n-1} + \cdots + a_1 7 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \equiv 0\left(\bmod 2\right)$$

إذاً : $2 \mid a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ ، وهو المطلوب .

نثبت الطرف الثاني ، وهو : $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ عدد زوجي .

أي أن : $2 \mid a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ ، وبالتالي : $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \equiv 0\left(\bmod 2\right)$.

نعلم أن : $7^n \equiv 1 \pmod 2$ ، إذاً : $a_n 7^n \equiv a_n \pmod 2$ ، وبالمثل : $a_{n-1} 7^n \equiv a_{n-1} \pmod 2$ بالمثل البقية . بالجمع من خصائص التطابقات سنجد أن :

$$a_n 7^n + a_{n-1} 7^{n-1} + \cdots + a_1 7 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod 2$$

(14) **إذا عرفنا :** $S(n) = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0$ **حيث :** $n = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}_{(10)} \in \mathbb{Z}^+$.

أثبت أن : $9 \mid n - S(n)$.

الحل :

نعيد كتابة العدد : n على صورته العشرية : $n_{(10)} = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$.

أولاً : لاحظ أن : $10^n - 1 = (10-1)(10^{n-1} + \cdots + 10 + 1) = 9 \cdot (10^{n-1} + \cdots + 10 + 1)$.

الآن :

$$\begin{aligned} n - S(n) &= (a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0) - (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0) \\ &= (a_k 10^k - a_k) + (a_{k-1} 10^{k-1} - a_{k-1}) + \cdots + (a_1 10^1 - a_1) + (a_0 - a_0) \\ &= a_k \cdot (10^k - 1) + a_{k-1} \cdot (10^{k-1} - 1) + \cdots + a_1 \cdot (10^1 - 1) + 0 \\ &= a_k \cdot 9 \cdot (10^{k-1} + \cdots + 1) + a_{k-1} \cdot 9 \cdot (10^{k-2} + \cdots + 1) + \cdots + a_1 \cdot 9 \\ &= 9 \cdot \left[a_k \cdot (10^{k-1} + \cdots + 1) + a_{k-1} \cdot (10^{k-2} + \cdots + 1) + \cdots + a_1 \right] \end{aligned}$$

بما أن : 9 عامل للمقدار : $n - S(n)$. إذاً : $9 \mid n - S(n)$.

(15) **حدد ما إذا كان العدد :** $\underbrace{20 \cdots 04}_{2004-times}$ **مربع كامل .**

الحل :

لاحظ أن العدد يقبل القسمة على : 3 لأن مجموع خاناته يساوي : 6 ، ولكن لا يقبل القسمة على : 9 لأن مجموع خاناته لا يقبل القسمة على : 9 . إذاً العدد ليس مربع كامل .

لأنه لو كان مربع كامل ، ويقبل القسمة على : 3 لقبل القسمة على مربع الثلاثة ، وهو : 9 .

(16) **أوجد أصغر عدد :** n **الذي يحقق :** $lcm[15, n] = n$ ، **وخاناته إما :** 0 **أو** 8 .

الحل :

بما أن : $lcm[15, n] = n$ هذا يعني أن : $15 \mid n$ ، وبالتالي : $3 \mid n$ ، و $5 \mid n$. بما أن : $5 \mid n$ هذا يعني أن خانة الآحاد تساوي : 0 ، وبما أن : $3 \mid n$. إذاً مجموع خاناته يقبل القسمة على : 3 ، وبما أن خاناته : 0,8 . بالتجربة سنجد أن أقل خانات تحقق هي : 8880 .

(7) مسائل إضافية على الدرس :

(1) حول الأعداد التالية إلى الأساس عشرة :

$(a)\ 2244_{(5)}$, $(b)\ 123456_{(7)}$, $(c)\ 20201_{(3)}$, $(d)\ 11001100_{(2)}$

(2) حول العدد التالي : $1776_{(10)}$ إلى الأساسات :

$(a)\ (2)$, $(b)\ (3)$, $(c)\ (4)$, $(d)\ (5)$, $(e)\ (6)$, $(f)\ (7)$

(3) كم عدد الأساسات بين : (2) ، و (9) بحيث يكون آخر خانة في العدد : $576_{(10)}$ تساوي الواحد .

(4) أوجد الناتج : $467_{(8)} + 12_{(3)} - 6_{(11)}$ في الأساس : (10) .

(5) عبر عن العدد : $1010110101_{(2)}$ ضمن الأساس : (4) .

(6) أوجد قيمة : x إذا كان :

$(a)\ x2_{(4)} = 16_{(8)}$, $(b)\ 123_{(x)} = 1004_{(4)}$, $(c)\ 23x_{(4)} = 1x10_{(3)}$

(7) كم خانة للعدد : $4^{20} \times 5^{27}$ في التمثيل العشري .

(8) إذا كان : $325_{(x)} = 125$ أوجد : x .

(9) أوجد الصورة الاعتيادية للعدد الدوري : $0.\overline{91}$.

(10) أوجد كل الأعداد الصحيحة التي خانتها الأولى تساوي : 6 ، وإذا ألغينا الخانة الأولى ، فإن العدد المكون من الخانات الباقية يساوي : $\frac{1}{25}$ من العدد الأصلي .

(11) أوجد عدد من خمس خانات : $abcde$ يحقق : $4 \cdot abcde = edcba$.

(12) أثبت أن مربع أي عدد أولي لا يمكن كتابته على صورة عدد مكون من أربعة أرقام متشابهة لأي أساس .

(13) أوجد قيمة العدد الصحيح : m الذي يحقق أن : $\overline{424}_{(m)} = 3 \times \overline{123}_{(m)}$.

(14) ليكن : $m = x^2 + x + 1$ حيث : x عدد في الأساس : 6 أوجد القيم الممكنة لرقم الآحاد في العدد : m .

(15) حاصل جمع العددين : $AMC10 + AMC12 = 123422$ أوجد : $A + M + C$.

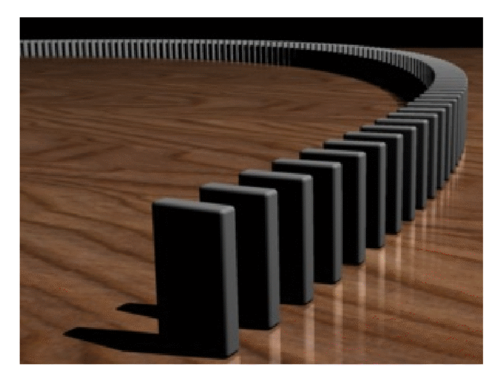
(16) أوجد الأساس : b بحيث يكون العددين : $55_{(b)}$, $45_{(b)}$ عددين مربعين لعددين صحيحين متتاليين .

المحاضرة السابعة

الاستقراء الرياضي

Mathematical Induction

الاستقراء الرياضي *(Mathematical induction)* هو أحد أنواع البرهان الرياضي تستخدم عادة لبرهنة أنّ معادلة أو متباينة ما صحيحة لمجموعة لانهائية من الأعداد ، كالأعداد الصحيحة . كذلك يستخدم لإثبات قابلية القسمة لعبارات لا نستطيع إثباتها إلا بهذه الطريقة ، أو كانت هذه الطريقة هي الأسهل في الإثبات . يعتمد هذا البرهان على مبدأ وقوع أحجار الدومينو ، ويتم على مرحلتين . بصورة عامة . : في الأولى ، يبرهن أنّ أوّل رقم في المجموعة يحقّق المطلوب، وفي الثانية نفرض أنّ المطلوب يتحقّق لعدد ما من المجموعة ، ونبرهن ، جبريًا ، مثلاً، أنّه يتحقّق أيضًا للعدد الذي يليه في المجموعة استنادًا على الفرض وعلى الأساس .



كما ذُكر سابقاً يعتمد مبدأ الاستقراء على خطوتين خطوة الفرض وخطوة الإثبات ، ولكن بعض الأحيان نحتاج أن نعتمد على صحة خطوتين أو أكثر قبل إثبات العمومية ، أو في بعض الأحيان قد يكون الإثبات يبدأ صحة عند غير الرقم الأول .

(1) الاستقراء الرياضي العام : *General Mathematical Induction*

وهو الأكثر شهرة ، ويعتمد على خطوتين . خطوة الأساس ، وخطوة الاستقراء ، ولكن يمكن تقسيم خطواته . للتوضيح . لثلاثة أجزاء .

إذا كانت : P_n متتالية من العبارات الرياضية ، و n_0 عدد صحيح

- نثبت صحة العبارة عند : P_{n_0} .
- نفرض صحة العبارة عند : P_k حيث : $k \geq n_0$.
- نثبت صحة العبارة عند : P_{k+1} .

والأمثلة التالية ستوضح الخطوات .

(2) مسائل محلولة على الدرس :

(1) **أثبت صحة العبارة التالية :** $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

الحل :

فالنطبق الخطوات الثلاث :

- العبارة صحيحة عند : $n=1$ لأن : $1=\frac{1.(1+1)}{2}$
- نفرض صحة العبارة عند : $n=k$ أي أن : $1+2+\cdots+k=\frac{k.(k+1)}{2}$.
- نثبت صحة العبارة عند : $n=k+1$ أي المطلوب إثبات أن :

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

نبدأ دوماً من الخطوة السابقة بإضافة الحد الذي رتبته : $(k+1)$ لطرفي العبارة :

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+k+(k+1)&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\&=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}\\&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

والآن انتهى الإثبات .

(2) **أثبت صحة العبارة التالية :** $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

الحل :

فلنختصر الخطوات قليلاً :

لاحظ أن : $P(1)$ صحيحة لأن : $1^2=\frac{1.(1+1)(2.1+1)}{6}=\frac{1.2.3}{6}=1$.

نفرض صحة العبارة عند : $P(k)$ أي : $1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

الآن نريد إثبات الصحة عند العدد الذي يلي : k أي إثبات أن : $P(k+1)$ صحيحة .

أي المطلوب أن : $1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ ، **فالنبدأ :**

$$\begin{aligned}P(k+1) &= 1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\ &= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)+6k+6}{6}\right]\\ &= (k+1)\left[\frac{2k^2+7k+6}{6}\right]\\ &= \left[\frac{(k+2)(2k+3)}{6}\right]=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\end{aligned}$$

والآن انتهى الإثبات .

(3) **أثبت صحة العبارة التالية :** $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = 1^3+2^3+\cdots+n^3$.

الحل :

العبارة متحققة عند : $P(1)$ لأن : $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$.

المطلوب إثبات أن : $\sum_{n=1}^{n=k+1} n^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$ مع ملاحظة أنا : $P(k)$ متحققة فرضاً . إذاً :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{n=k+1} n^3 &= \sum_{n=1}^{n=k} n^3 + (k+1)^3\\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3 = (k+1)^2\left[\frac{k^2}{4}+\frac{4(k+1)}{4}\right]\\ &= (k+1)^2\left[\frac{k^2+4k+4}{4}\right]\\ &= (k+1)^2\left[\frac{(k+2)^2}{4}\right] = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}\end{aligned}$$

والآن انتهى الإثبات .

لاحظ أننا اختصرنا توضيح بعض الخطوات ، وشرحها كما في المثال الأول .

ولاحظ أننا نوعنا طرق الإثبات ، والتعبير عن العبارة حتى تستفيد من إثباتها في مراجع مختلفة .

(4) **باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي أثبت أن :** $3^n > 2^n$ **لكل عدد طبيعي :** n .

الحل :

المقدمة متحققة أي : $P(1)$ صحيحة لأن : $3^1 > 2^1$. كذلك نفرض صحة العبارة : $P(k)$

أي أن : $3^k > 2^k$.

الآن نثبت صحة العبارة عند : $P(k+1)$. إذاً :

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 3^{k+1} \\ &= 3^k.3 \\ &> 2^k.3 > 2^k.2 = 2^{k+1} \end{aligned}$$

إذاً : $3^n > 2^n$ متحققة دوماً لكل عدد طبيعي : n .

(5) **أثبت لأي عدد صحيح : n ، فإن : 3 تقسم :** $n^3 + 2n$.

الحل :

عند : $n = 1$ سنجد أن العبارة صحيحة أي أن : $P(1)$ متحققة .

نفرض صحة العبارة عند : $n = k$ أي أن : $P(k)$ متحققة .

نثبت صحة العبارة عند : $n = k+1$ أي المطلوب أن : $3 \mid (k+1)^3 + 2(k+1)$.

الآن : نفرض أن : $3M = k^3 + 2k$.

إذاً من الفرض :

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + 2(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 \\ &= \underbrace{k^3 + 2k}_{3M} + 3k^2 + 3k + 3 \\ &= 3M + 3(k^2 + k + 1) \\ &= 3(M + k^2 + k + 1) \end{aligned}$$

وهذا مقدار يقبل القسمة على : 3 لأنه من عوامله .

(6) **باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي أثبت أن :** $3^n > 2^n + n$ **لكل عدد طبيعي :** $n \ge 2$.

الحل :

المقدمة متحققة أي : $P(n=2)$ صحيحة لأن : $3^2 = 9 > 2^2 + 2 = 6$. كذلك نفرض صحة العبارة : $P(k)$ أي أن : $3^k > 2^k + k$. الآن نثبت صحة العبارة عند : $P(k+1)$. إذاً :

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 3^{k+1} \\ &= 3 \cdot 3^k > 3(2^k + k) \\ &= 3 \cdot 2^k + 3k > 2 \cdot 2^k + k + 1 \\ &= 2^{k+1} + k + 1 \end{aligned}$$

إذاً : $3^{k+1} > 2^{k+1} + k + 1$ إذاً العبارة متحققة دوماً لكل عدد طبيعي : $n \ge 2$.

(7) **باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي أثبت أن :** $n! > 3^n$ **لكل عدد طبيعي :** $n \ge 7$.

الحل :

المقدمة متحققة أي : $P(n=7)$ صحيحة لأن : $7! = 5040 > 3^7 = 2187$. كذلك نفرض صحة العبارة : $P(k)$ أي أن : $k! > 3^k$. الآن نثبت صحة العبارة عند : $P(k+1)$. إذاً :

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (k+1)! \\ &= (k+1) \cdot k! > (k+1) \cdot 3^k \\ &= k \cdot 3^k + 3^k > k \cdot 3^k \end{aligned}$$

إذاً : $(k+1) \cdot k! > k \cdot 3^k = 3^{k+1}$ ، وهذا يعني أن : $(k+1)! > 3^{k+1}$. إذاً : $P(k+1)$

إذاً العبارة متحققة دوماً لكل عدد طبيعي : $n \ge 7$.

(8) **أثبت أن :** $169 \mid 3^{3n+3} - 26n - 27$. **حيث :** n **عدد صحيح موجب** .

الحل :

عند : $n = 1$ سنجد أن : $3^6 - 26 - 27 = 676 = 4 \cdot 169$. إذاً العبارة صحيحة أي أن : $P(1)$ متحققة . كذلك العبارة : $169 \mid 3^{3k+3} - 26k - 27$ متحققة .

الآن نريد أن نثبت : $169 \mid 3^{3(k+1)+3} - 26(k+1) - 27$.

من خواص القاسم لعددين إذا كان يقسم أحدهما ، ويقسم حاصل جمعهما أو حاصل طرحهما ، فهو يقسم الآخر .

الآن :

$$3^{3(k+1)+3}-26(k+1)-27-\left(3^{3k+3}-26k-27\right)=$$

$$=27.3^{3k+3}-26k-26-27-\left(3^{3k+3}-26k-27\right)=26.3^{3k+3}-26=26\left(3^{3k+3}-1\right)$$

الآن يكفي أن نثبت أن : $13 \mid 3^{3k+3}-1$ ، وهذه سهلة من تحليل المقدار حيث :

$$3^{3k+3}-1=27^{k+1}-1=26\left(27^{k}+\cdots+1\right)\Rightarrow 13 \mid 3^{3k+3}-1$$

إذاً : $26.3^{3k+3}-26 \mid 13.13=169$ ، وبالتالي : $169 \mid 3^{3n+3}-26n-27$.

(9) أثبت أن مجموع ثلاثة أعداد طبيعية مكعبة متتالية يقبل القسمة على : 9 .

الحل :

نفرض أن الأعداد الطبيعية المتتالية هي : $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$.

عندما : $n=1$ تصبح العبارة على الصورة : $1^3+2^3+3^3=1+8+27=36$ ، وهو عدد يقبل القسمة على : 9 . إذاً العبارة متحققة عندما : $n=1$.

نفرض صحة العبارة عند : $n=k$ أي أن : $9 \mid k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$.

الآن نثبت فقرة الاستقراء كالتالي :

$$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3=(k+1)^3+(k+2)^3+k^3+9k^2+27k+27$$

$$=k^3+(k+1)^3+(k+2)^3+9\left(k^2+3k+3\right)$$

الآن العبارة من جزئين أحدهما يقبل القسمة على : 9 من خطوة الفرض ، والآخر تمثل التسعة عامل من عوامله إذاً المقدار يقبل القسمة على : 9 .

(10) **إذا كانت :** $E_n = 2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}$. **أثبت لأي عدد صحيح :** $n \geq 0$ ، **فإن :** $23 \mid E_n$.

الحل :

عند : $n = 0$ سنجد أن : $E_0 = 23$ إذاً العبارة صحيحة أي أن : $P(0)$ متحققة .

نفرض صحة العبارة عند : $n = k$ أي أن : $P(k) : E_k = 2^{7k+3} + 3^{2k+1} \cdot 5^{4k+1}$ متحققة .

نثبت صحة العبارة عند : $n = k+1$ أي المطلوب إثبات أن : $23 \mid 2^{7k+10} + 3^{2k+3} \cdot 5^{4k+5}$.

تعتمد الفكرة على طرح : $P(k+1) - P(k)$ ، فإذا كان : 23 تقسم ناتج الطرح ، فسوف تقسم الحد : $P(k+1)$ من خواص القاسم .

الآن :

$$\begin{aligned} & 2^{7k+10} + 3^{2k+3} \cdot 5^{4k+5} - 36\left(2^{7k+3} + 3^{2k+1} \cdot 5^{4k+1}\right) \\ &= 128 \cdot 2^{7k+3} + 5625 \cdot 3^{2k+1} \cdot 5^{4k+1} - 36\left(2^{7k+3} + 3^{2k+1} \cdot 5^{4k+1}\right) \\ &= 92 \cdot 2^{7k+3} + 5589 \cdot 3^{2k+1} \cdot 5^{4k+1} \\ &= 23\left(4 \cdot 2^{7k+3} + 243 \cdot 3^{2k+1} \cdot 5^{4k+1}\right) \end{aligned}$$

إذاً بما أن المقدار يقسم حاصل الطرح ، ويقسم أحد الحدين ، فهو يقسم الحد الآخر .

إذاً $23 \mid P(k+1) = 2^{7k+10} + 3^{2k+3} \cdot 5^{4k+5}$. هذا يعني أن العبارة مطلقاً صحيحة .

(11) **أثبت أن :** $7^n - 4^{n+2}$ **تقبل القسمة على :** 3 . **لكل عدد صحيح موجب :** n .

الحل :

نثبت صحة العلاقة عند : $n = 1$ ، فنجد أن : $7^1 - 4^3 = 7 - 64 = -57$ ، وهو عدد يقبل القسمة على : 3 . إذاً العبارة الأولى متحققة .

نفرض صحة العلاقة عند : $n = k$ ، وهذا يقتضي أن : $3 \mid 7^k - 4^{k+2}$. إذاً : $7^k - 4^{k+2} = 3m$.

الآن : نثبت صحة العلاقة عند : $n = k+1$ أي المطلوب إثبات أن : $3 \mid 7^{k+1} - 4^{k+3}$. الآن :

$$\begin{aligned} 7^{k+1} - 4^{k+3} &= 7 \cdot 7^k - 4 \cdot 4^{k+2} \\ &= 7 \cdot 7^k - (7-3) \cdot 4^{k+2} \\ &= 7 \cdot 7^k - 7 \cdot 4^{k+2} + 3 \cdot 4^{k+2} \\ &= 7 \cdot \left(7^k - 4^{k+2}\right) + 3 \cdot 4^{k+2} \\ &= 7 \cdot 3m + 3 \cdot 4^{k+2} \\ &= 3 \cdot \left(7m + 4^{k+2}\right) \end{aligned}$$

إذاً : $3 \mid 7^{k+1} - 4^{k+3}$ ، وبالتالي العبارة صحيحة لكل عدد : $n \in \mathbb{Z}^+$.

(12) **إذا كان :** $a_1, a_2, \ldots$ **متتالية معرفة كالتالي :** $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ، **و** $a_1 = 5$ ، $n \geq 1$. **أثبت أن :** $a_n = 3 \cdot 2^n - 1$ **لكل :** $n \geq 1$.

الحل :

عند : $n = 1$ تصبح العبارة على الصورة : $a_1 = 3 \cdot 2^1 - 1 = 6 - 1 = 5$. إذاً العبارة متحققة .

نفرض صحتها عند : $n = k$. أي أن : $a_k = 3 \cdot 2^k - 1$ صحيحة ، ومتحققة .

الآن نثبت صحة العبارة عند : $n = k + 1$ أي المطلوب إثبات أن : $a_{k+1} = 3 \cdot 2^{k+1} - 1$.

بما أن : $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ، ومعطى أن : $a_k = 3 \cdot 2^k - 1$ متحققة إذاً :

$a_{n+1} = 2a_n + 1 = 2(3 \cdot 2^k - 1) + 1 = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 + 1 = 3 \cdot 2^{k+1} - 1$ ، وهو المطلوب .

(13) **أثبت أن :** $\frac{(n^3 + 2n)}{3}$. **عدد صحيح لكل :** $n \in \mathbb{N}$.

الحل :

عند : $n = 1$ تصبح العبارة على الصورة : $\frac{(1^3 + 2 \cdot 1)}{3} = \frac{3}{3} = 1$. إذاً العبارة متحققة .

نفرض صحة العبارة عند : $n = k$. أي : $\frac{(k^3 + 2k)}{3}$ عدد صحيح . إذاً : $k^3 + 2k = 3m$.

نثبت صحة العبارة عند : $n = k + 1$. أي إثبات أن : $\frac{(k+1)^3 + 2(k+1)}{3}$ عدد صحيح .

$$\begin{aligned}
\frac{(k+1)^3 + 2(k+1)}{3} &= \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2}{3} \\
&= \frac{k^3 + 2k + 3k^2 + 3k + 3}{3} \\
&= \frac{3m + 3k^2 + 3k + 3}{3} \\
&= \frac{3(m + k^2 + k + 1)}{3} \\
&= m + k^2 + k + 1
\end{aligned}$$

وهذا عدد صحيح .

(14) **إذا كان :** $a_1, a_2, \dots a_n$. **أعداد أولية نسبياً . أثبت أن :** $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = lcm[a_1, a_2, \dots a_n]$.

الحل :

هنا سيبدأ الاستقراء عند : $n = 2$ لأن المضاعف لايكون إلا لعددين . الآن عند : $n = 2$ سنجد أن :

$a_1 \cdot a_2 = \dfrac{a_1 \cdot a_2}{\gcd(a_1, a_2)} = lcm[a_1, a_2]$. لأن : $\gcd(a_1, a_2) = 1$ ، وذلك لكون الأعداد أولية نسبياً .

نفرض صحة العلاقة عند : $n = k$ أي : $lcm[a_1, a_2, \dots a_k] = a_1 \cdot a_2 \cdots a_k$. نريد إثبات صحة العلاقة عند : $n = k + 1$ أي المطلوب إثبات أن : $lcm[a_1, a_2, \dots a_k, a_{k+1}] = a_1 \cdot a_2 \cdots a_k \cdot a_{k+1}$

باستخدام العلاقة بين القاسم ، والمضاعف لعددين : $\gcd(a_1, a_2, \dots a_k, a_{k+1}) = 1$.سنجد أن :

$$\begin{aligned} lcm[a_1, a_2, \dots a_k, a_{k+1}] &= lcm[lcm[a_1, a_2, \dots a_k], a_{k+1}] \\ &= lcm[a_1 \cdot a_2 \cdots a_k, a_{k+1}] \\ &= \frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_k \cdot a_{k+1}}{\gcd(a_1, a_2, \dots a_k, a_{k+1})} \\ &= a_1 \cdot a_2 \cdots a_k \cdot a_{k+1} \end{aligned}$$

(15) **أثبت أن العدد :** $\underbrace{11\dots1}_{3^n}$. **يقبل القسمة على :** 3 .

الحل :

معنى السؤال إذا كان العدد مكرر فيه الواحد بعدد قوى الثلاثة أثبت أنه يقبل القسمة على الثلاثة .

واضح أن خطوة الابتداء صحيحة عند : $n = 1$ ، فإن : $3 \mid 111$ ، ونفرض صحتها عند : $n = k$ أي أن : $3 \mid \underbrace{11\dots1}_{3^k}$. نريد إثبات صحتها عند : $n = k + 1$ أي المطلوب إثبات أن : $3 \mid \underbrace{11\dots1}_{3^{k+1}}$.

$$\begin{aligned} \underbrace{11\dots1}_{3^{k+1}} &= 10^{3^k} + 10^{3^k - 1} + \dots + 1 = \frac{10^{3^{k+1}} - 1}{9} = \frac{\left(10^{3^k}\right)^3 - 1}{9} \\ &= \frac{10^{3^k} - 1}{9} \cdot \left(10^{2 \cdot 3^k} + 10^{3^k} + 1\right) = \underbrace{11\dots1}_{3^n} \cdot \left(10^{2 \cdot 3^k} + 10^{3^k} + 1\right) \end{aligned}$$

وهذا عدد يقبل القسمة على : 3 . لأن : $3 \mid \underbrace{11\dots1}_{3^k}$

(3) مسائل إضافية على الدرس :

(1) أثبت أن : $10^n - 9n + 80$ تقبل القسمة على : 81 . لكل عدد صحيح : $n \geq 1$.

(2) أثبت أن : $2^n > n^2$ لكل عدد صحيح : $n \geq 5$.

(3) أثبت أن : $3^{n-1} > 5n$ لكل عدد صحيح : $n \geq 4$.

(4) أثبت أن : $0 \cdot 2^n + 1 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-2} + \cdots + (n-1) \cdot 2^1 + n \cdot 2^0 = 2^{n+1} - n - 2$

لكل عدد طبيعي : n.

(5) أثبت أن مجموع : n من الأعداد الفردية المتتالية ابتداءاً من الواحد يساوي : n^2 .

(6) أثبت أن : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^3$. لكل عدد طبيعي : n .

(7) أثبت أن : $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. لكل عدد طبيعي : n ، و $x \geq -1$.

(8) أثبت أن : $2304 \mid 7^{2n} - 48n - 1$. لكل عدد طبيعي : n .

(9) أثبت أن : $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$. لكل عدد : $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(10) أثبت أن : $\dfrac{10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5}{9}$. عدد صحيح لكل : $n \in \mathbb{N}$.

(11) أثبت أن : 169 من عوامل العدد : $3^{3n+3} - 26n - 27$ لكل عدد : $n \in \mathbb{N}$.

(12) إذا كان : $a_1, a_2, \ldots$ متتالية معرفة كالتالي : $a_{n+1} = 2a_n - 1$ ، و $a_1 = 2$ ، $n \geq 1$. أثبت أن : $a_n = 2^{n-1} + 1$ لكل : $n \geq 1$.

(13) أثبت أن : $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right)\left(1 - \dfrac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n}$ لكل : $n \geq 2$.

(14) أثبت أن : $f(n) = n(n+1)(n+2)$ أثبت أن : $6 \mid f(n)$ لكل : $n \geq 1$.

(15) أثبت أن : $\dfrac{4^{2n+1} + 3^{n+2}}{13}$ عدد صحيح لكل : $n \geq 1$.